SEP 10

ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK

INGENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN

HERAUSGEGEBEN VON PROFESSOR R. VON MISES, BERLIN

Unter Mitwirkung von A. FÖPPL-München, G. HAMEL-Charlottenburg, R. MOLLIER-Dresden, H. MÜLLER-BRESLAU-Charlottenburg, L. PRANDTL-Göttingen und R. RÜDENBERG-Berlin

: Band 3 : :: Heft 3 ::
Juni 1923 Seite 161 bis 240

I N H A L T :

HAUPTAUFSÄTZE:
SCHMIDT, Entstehung und Dämpfung von Fundamentschwingungen / WILDHAGEN, Strömungswiderstand hochverdichteter Luft in Rohrleitungen / SCHILLING, Böschungsflächen mit Kegelschnitten als Basiskurven / FEDERHOFER, Zur Synthese der Getriebe / BOCK, Mathematische Grenznutzentheorie

ZUSAMMENFASSENDE BERICHTE:
NICOLAI, Stabilitätsprobleme der Elastizitätstheorie

KURZE AUSZÜGE
Praktische Analysis

KLEINE MITTEILUNGEN

BUCHBESPRECHUNGEN

NACHRICHTEN

VERLAG DES VEREINES DEUTSCHER INGENIEURE

Werkstätten für Präzisionsmechanik

Sommer & Runge SuR BERLIN **Berlin-Friedenau**

Bennigsen- Straße 23/24

Längenteilmaschinen / Laboratoriumsapparate

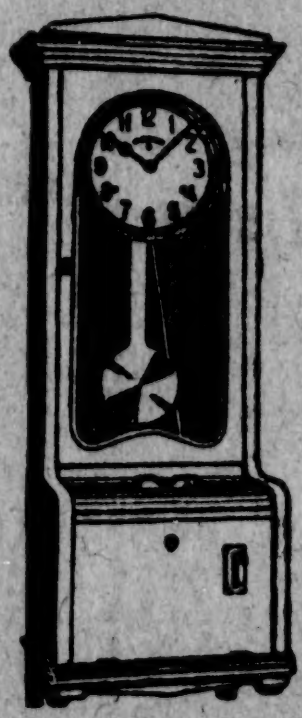
Wir übernehmen: Die Vertretung und den Vertrieb neuer Apparate. Neu- und Umkonstruktion von wissenschaftlichen und technischen Apparaturen und Gerätschaften.

MÜLLER-SCHLENKER

UHRENFABRIK

SCHWENNINGEN AM NECKAR

WÜRTTEMBERG. SCHWARZWALD



ARBEITSZEIT-KONTROLL-APPARAT „CHRONOS"
f. Zeitkontrolle u. Lohnberechnung.

DUPLO-ZEITRECHNER
für moderne Betriebskontrolle z. Feststellung der wirklichen Selbstkosten.

WÄCHTERKONTROLL-UHREN
tragbar und stationär.

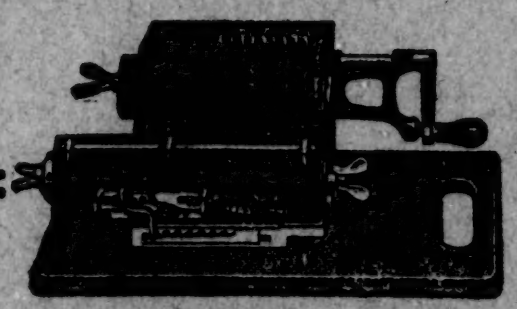
Drucksachen Nr. 12 mit Preisen auf Anfrage gratis und franko.

Gehirn Stahl

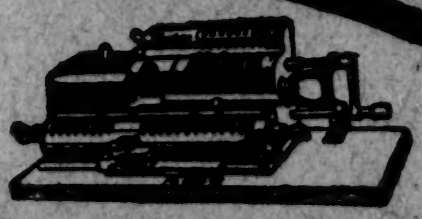
Brunsviga
(System Trinks)
die Rechenmaschine

Prospekt P und kostenlose Vorführung von den alleinigen Fabrikanten

GRIMME, NATALIS & Co. A.-G./BRAUNSCHWEIG



TRIUMPHATOR



die QUALITÄTS-RECHENMASCHINEN

TRIUMPHATOR-WERK M.B.H / LEIPZIG-MÖLKAU 361

Spezialfabrik für Rechenmaschinen

ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK
INGENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN

Bd. 3 **Ende Juni 1923** **Heft 3**

Inhalt:

	Seite
Hauptaufsätze. E. Schmidt: Ueber Entstehung und Dämpfung von Fundamentschwingungen	161
M. Wildhagen: Ueber den Strömungswiderstand hochverdichteter Luft in Rohrleitungen	181
F. Schilling: Ueber die Böschungsflächen mit Kegelschnitten als Basiskurven	197
K. Federhofer: Zur Synthese der Getriebe	217
A. P. Bock: Einführung in die mathematische Grenznutzentheorie	223
Zusammenfassende Berichte. E. L. Nicolai: Stabilitätsprobleme der Elastizitätstheorie	227
Kurze Auszüge. Praktische Analysis	230
Kleine Mitteilungen. Alexandrow: Ueber den Maxwellschen Satz der technischen Elastizitätstheorie — Pirani: Ueber die Interpolation von Kurvenscharen — Schweitzer: Einfacher logarithmischer Spiralenzeichner	234
Buchbesprechungen. Zipperer: Tafeln zur harmonischen Analyse periodischer Kurven — Egerer: Ingenieur-Mathematik — Lindow: Differentialgleichungen unter Berücksichtigung der praktischen Anwendung in der Technik — Bieberbach: Differential- und Integralrechnung; Funktionentheorie — Scheffers: Lehrbuch der darstellenden Geometrie	237
Nachrichten	240

HAUPTAUFSÄTZE

Über Entstehung und Dämpfung von Fundamentschwingungen.[1])

Von **ERNST SCHMIDT** in München.

(Mitteilung aus dem Laboratorium für technische Physik der Technischen Hochschule München.)

Alle Maschinen mit beweglichen Teilen führen im Betriebe mehr oder weniger große Schwingungen aus, die sich als Erschütterungen, Töne oder Geräusche in der Umgebung ausbreiten. Sie verursachen unbequeme Belästigungen der Nachbarschaft und haben zusätzliche Beanspruchungen der Konstruktionsteile zur Folge, welche reichlichere Bemessung und erhöhten Kostenaufwand erfordern. Sind diese Kräfte nicht ausreichend berücksichtigt, so können die Schwingungen Brüche der Maschinenteile, Beschädigungen der Fundamente und des Gebäudes herbeiführen. Außerdem ist die Aussendung von elastischen Wellen mit einem Energieverlust verbunden, der den Wirkungsgrad der Maschine herabsetzt.

Die Ursachen der Schwingungen sind in den meisten Fällen die Beschleunigungskräfte hin- und hergehender und die Fliehkräfte nicht ausgeglichener rotierender Massen. Durch den sogenannten Massenausgleich kann man diese Kräfte aufheben oder wenigstens verkleinern. Ist der Massenausgleich nicht möglich oder von ungenügendem Erfolg, so sucht man die Uebertragung der Schwingungen an die Umgebung durch Vergrößerung der Fundamentmasse oder durch elastische Zwischenlagen zu erschweren. Dabei tritt häufig nicht die gewünschte Wirkung ein, es kommt sogar vor, daß das Uebel verstärkt wird. Bei der Erklärung dieser Mißerfolge beruhigt man sich mit dem Begriff der

[1]) Auszug aus dem 1. Teil der Münchener Dissertation des Verfassers. (Referenten: Prof. Dr. A. Föppl und Prof. Dr. Osc. Knoblauch.) Der 2. Teil behandelt die experimentelle Untersuchung von schwingungsdämpfenden Unterlagen. (Anm. bei der Korrektur: inzwischen erschienen, vergl. E. Schmidt, Experimentelle Untersuchungen von schwingungsdämpfenden Unterlagen für Maschinen, Gesundheitsingenieur 1923, S. 61.)

Resonanz, ohne näher auf die Bedingungen ihres Auftretens einzugehen. Die von Schlick begründete Theorie des Massenausgleichs beschränkt sich auf die Berechnung der Massenkräfte und lehrt, wie man diese gegeneinander ausgleichen kann, sie sagt aber nichts aus über die von den Kräften verursachten Schwingungen. Den verwickelten Schwingungsvorgängen selbst suchte man nach dem Vorgange von Schlick experimentell beizukommen.

Die vorliegende Arbeit enthält eine theoretische Untersuchung der Schwingungen, welche von Maschinen mit unausgeglichenen Massen auf das Fundament übertragen werden, bei Beschränkung auf rein periodische Vorgänge und unter Verwendung der in der Wechselstromtechnik üblichen Darstellung oszillierender Größen durch ebene Vektoren und komplexe Zahlen (**2**) Es wird zunächst gezeigt, wie man die Schwingungen der frei beweglichen Maschinen aus ihren Massen, Trägheitsmomenten und ihrem Drall berechnen kann (**3**, **4**). Dann werden die Eigenschaften des Fundamentes untersucht (**5**); es ergibt sich, daß jedes Fundament gekennzeichnet wird durch das Verhältnis der einwirkenden oszillierenden Kraft zur hervorgerufenen Schwingung nach Größe und Phase. Die Abhängigkeit dieser Beziehung von der Frequenz der Schwingungen wird als Fundamentfunktion bezeichnet. Ist die Fundamentfunktion für alle Freiheitsgrade bekannt, so sind damit die für den Schwingungsvorgang wesentlichen Eigenschaften des Fundamentes vollständig beschrieben.

An einem Beispiel, dem an den Enden nachgiebig gelagerten Balken, werden unter gewissen Voraussetzungen für die Art der Einspannung die Fundamentfunktionen für alle Freiheitsgrade berechnet und für spezielle Fälle graphisch dargestellt (**6**). Dann wird der Einfluß dämpfender Unterlagen auf den Schwingungsvorgang untersucht (**9**). Ihre Wirkung kann einerseits die einer vollkommen elastischen Feder sein, die Energie in umkehrbarer Weise aufspeichert, andererseits kann aber auch eine nicht umkehrbare Absorption der Energie durch Umwandlung in Wärme eintreten. Als Maß der Wirkung kann man das Verhältnis der erzeugten Formänderung zur einwirkenden Kraft, das wir als »Weichheit« bezeichnen, benutzen. Hat das Material eine Energie absorbierende Wirkung, so eilt die Formänderung der Kraft in der Phase nach.

Die Untersuchungen zeigen, wie der Schwingungsvorgang berechnet werden kann, wenn gegeben sind: 1. die schwingungserzeugenden Kräfte, 2. die Massenverteilung und der Drall der Maschine, 3. die Fundamentfunktion, 4. die Weichheit der dämpfenden Unterlagen.

1. Bisherige Versuche. Systematische Versuche über Fundamentschwingungen und den Einfluß dämpfender Unterlagen wurden von Berger[1]) durchgeführt. Berger stellte einen kleinen Elektromotor, an dem keine besonderen exzentrischen Massen angebracht waren, auf eine Betondecke und maß die Ausschläge der Decke bei verschiedenen Drehzahlen des Motors. Er fand, daß diese bei gewissen Drehzahlen Höchstwerte erreichen. Durch Verwendung dämpfender Unterlagen wird die Höhe der Höchstwerte abgeflacht, während sie sich gleichzeitig nach kleineren Drehzahlen hin verschieben. Genaue quantitative Angaben über die Größe der auftretenden Kräfte, über die elastischen Formänderungen der Unterlage werden nicht gemacht. Einige der von Berger aufgenommenen Versuchsreihen sind in Abb. 1 wiedergegeben. Die Untersuchung ist eine erste Orientierung auf dem wenig behandelten Gebiete, die zeigt, daß die Verhältnisse schon in einfachen Fällen recht kompliziert werden.

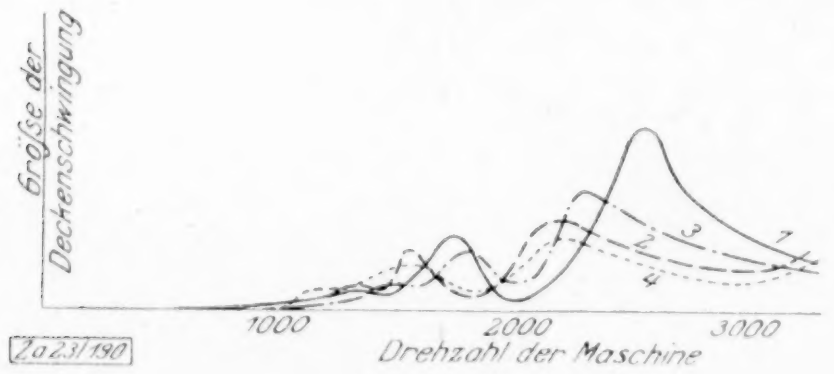


Abb. 1

1) Maschine ohne elastische Unterlage,
2) » mit gepreßtem Unterlagsfilz: 9,3 mm stark,
3) » » » » : 21,0 » » ,
4) » » Gummiunterlage: 5,0 » » .

In ähnlicher Weise untersuchte Ottenstein[2]) verschiedene Unterlagstoffe. Er brachte an der Schwungscheibe eines Elektromotors exzentrische Massen verschiedener

[1]) R. Berger, Ueber Erschütterungen, Gesundheitsingenieur 1913, S. 433.

[2]) R. Ottenstein, Ueber den Schutz gegen Schall und Erschütterungen, Dissertation, München 1915 und Beihefte zum Gesundheitsingenieur, 2. Reihe, 1. Heft 1916.

Größe an und erhielt für die Abhängigkeit des Deckenausschlages von der Motordrehzahl ähnliche Kurven wie Berger. Er berechnete zwar die Fliehkraft der exzentrischen Masse, aber das ist noch kein einwandfreies Maß für die auf die Decke wirkende Kraft. Außerdem untersuchte Ottenstein den Einfluß der Dicke und der statischen Beanspruchung einer dämpfenden Unterlage auf die Deckenschwingnng und stellte die Ergebnisse in Kurvenform zusammen.

Messungen von Maschinenschwingungen unter normalen Betriebsverhältnissen wurden von Sauer[1]) ausgeführt am Fahrgestell einer 20 PS-Benzollokomobile und an zwei Viertaktgasmaschinen auf Steinfundament. Bei der Benzollokomobile gingen 1,16 PS, also 5,8 vH der Nennleistung in Form von Fundamentschwingungen verloren. Außerdem gab Sauer eine theoretische Betrachtung der Schwingungsvorgänge unter der sehr speziellen und von der Wirklichkeit erheblich abweichenden Annahme, daß die Maschine als ein gedämpft schwingender Massenpunkt von nur einem Freiheitsgrad angesehen werden darf.

Es liegen also eine Reihe von experimentellen Arbeiten vor, doch lassen sich aus ihnen nur beschränkte Folgerungen ziehen, da es an einer Theorie der Vorgänge noch fehlt. Die Erscheinungen sind zu kompliziert, als daß ohne theoretische Vorarbeit durch das Experiment allein eine Klärung herbeigeführt werden könnte. Zur Ausfüllung dieser Lücke will die vorliegende Arbeit einen Beitrag liefern. Ihr Ziel ist die theoretische Untersuchung der Schwingungsvorgänge und die Aufklärung des Einflusses der für die Entstehung, Ausbreitung und Dämpfung der Schwingungen maßgebenden Größen.

2. Voraussetzungen. Verwendung komplexer Größen. Wir wollen uns auf die Betrachtung periodischer Vorgänge beschränken. In diesem Falle lassen sich alle auftretenden Kräfte und Bewegungen nach Fourier in harmonische Reihen entwickeln. Bei der mathematischen Untersuchung kann man jedes Glied dieser Reihen für sich behandeln und den Gesamtvorgang durch Uebereinanderlagern der Einzelschwingungen verschiedener Frequenz gewinnen. In vielen Fällen genügt schon die Untersuchung einer einzigen Harmonischen. Bei der Behandlung rein periodischer Vorgänge empfiehlt es sich, von der in der Elektrotechnik üblichen Darstellung durch Diagrammvektoren und komplexe Größen Gebrauch zu machen. Dabei wird eine oszillierende Größe bekanntlich aufgefaßt als die Projektion einer in der Zeichenebene gegen den Sinn des Uhrzeigers mit der Winkelgeschwindigkeit ω rotierenden Strecke auf eine festgehaltene Projektionsgerade. Denkt man sich die rotierende Strecke festgehalten, so kann man mit ihr nach den Regeln der Vektorrechnung rechnen. Diese geometrische Vorstellung besitzt ihren analytischen Ausdruck in den komplexen Zahlen der Gaußschen Zahlenebene. Eine oszillierende Größe kann dargestellt werden als komplexe Zahl

$$\mathfrak{A} = a e^{i\varphi} e^{i\omega t} = a\,[\cos(\omega t + \varphi) + i \sin(\omega t + \varphi)].$$

Diese komplexe Zahl entspricht einer in der komplexen Zahlenebene mit der Winkelgeschwindigkeit ω rotierenden Strecke vom absoluten Betrage a, die zur Zeit $t = 0$ die Neigung φ gegen die reelle Achse hat. Durch Abspaltung des Faktors $e^{i\omega t}$, der bei allen oszillierenden Größen gleicher Frequenz vorkommt und sich daher aus den Gleichungen forthebt, verschwindet die Zeitvariable. Dieser Vorteil bleibt auch bei Differentiationen und Integrationen bestehen, denn es ist:

$$\frac{d\mathfrak{A}}{dt} = i\omega a e^{i\varphi} e^{i\omega t} = i\omega \mathfrak{A}, \quad \frac{d^2\mathfrak{A}}{dt^2} = -\omega^2 \mathfrak{A}, \quad \int \mathfrak{A}\, dt = -\frac{i}{\omega}\mathfrak{A} \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Der Differentialquotient nach der Zeit geht also aus dem Vektor durch Multiplikation mit der rein imaginären Größe $i\omega$ hervor; das entspricht nach den Rechenregeln für komplexe Größen der gewöhnlichen Multiplikation mit dem reellen Faktor ω, verbunden mit einer Drehung von 90^0 gegen den Uhrzeigersinn, d. h. der Differentialquotient eilt dem Vektor um 90^0 in der Phase voraus. (Positive Phasenverschiebung.) Der 2. Differentialquotient nach der Zeit ist dem Vektor entgegengesetzt gerichtet. Das Zeitintegral $\int \mathfrak{A}\, dt$ eilt dem Vektor um 90^0 nach (negative Phasenverschiebung).

In der vorliegenden Arbeit werden die komplexen Zahlen, die oszillierende Größen darstellen, mit deutschen Buchstaben bezeichnet. Jede Komponente eines gewöhnlichen 3-dimensionalen Vektors, dessen Größe sich periodisch ändert, kann natürlich wieder als eine solche komplexe Zahl aufgefaßt werden.

[1]) H. Sauer, Messung und Rechnung der Fundamentschwingungen von einfachwirkenden Viertaktmaschinen, Dissertation, Darmstadt 1916.

Ferner wollen wir zur Vereinfachung stets voraussetzen, daß die Maschine aus einzelnen sich gegeneinander bewegenden starren Teilen besteht. Insbesondere soll die Grundplatte als ein starrer Körper angesehen werden können. Außerdem sollen die Schwingungen der Maschine klein sein im Vergleich mit den Bewegungen der Teile der Maschine gegeneinander.

3. Bewegungsgleichungen der freien Maschine. Sind m_i die unausgeglichenen Massen der Maschine, x_i, y_i, z_i ihre Schwerpunktskoordinaten und a_i, b_i, c_i die Hebelarme der Massenkräfte für den Koordinatenrichtungen parallele Drehachsen durch den Schwerpunkt, so wirken auf das festgehalten gedachte Maschinengestell die Kräfte und Momente

$$p_x = -\Sigma m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2}, \qquad q_x = -\Sigma m_i a_i \frac{d^2 x_i}{dt^2}$$

$$p_y = -\Sigma m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2}, \qquad q_y = -\Sigma m_i b_i \frac{d^2 y_i}{dt^2}$$

$$p_z = -\Sigma m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2}, \qquad q_z = -\Sigma m_i c_i \frac{d^2 z_i}{dt^2}$$

Setzen wir sämtliche Bewegungen als rein periodisch von der Form $x_i = X_i \cos(\omega t + \varphi_{xi})$ oder in komplexer Schreibweise $x_i = X_i e^{i\varphi_{xi}} e^{i\omega t}$ voraus, so sind auch die Kräfte und Momente von rein periodischem Charaktor und wir können diese, wenn wir wie verabredet, die komplexen Größen durch deutsche Buchstaben kennzeichnen und die Differentiationsregeln (1) berücksichtigen, darstellen in der Form

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{p}_x &= \omega^2 \Sigma m_i X_i e^{i\varphi_{xi}}, & \mathfrak{q}_x &= \omega^2 \Sigma m_i a_i X_i e^{i\varphi_{xi}} \\ \mathfrak{p}_y &= \omega^2 \Sigma m_i Y_i e^{i\varphi_{yi}}, & \mathfrak{q}_y &= \omega^2 \Sigma m_i b_i Y_i e^{i\varphi_{yi}} \\ \mathfrak{p}_z &= \omega^2 \Sigma m_i Z_i e^{i\varphi_{zi}}, & \mathfrak{q}_z &= \omega^2 \Sigma m_i c_i Z_i e^{i\varphi_{zi}} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Durch diese Gleichungen sind die auf das Maschinengestell ausgeübten Kräfte und Momente auf die bekannten Bewegungen der unausgeglichenen Massen der Maschine zurückgeführt. Man kann die Gleichungstripel noch vektoriell zusammenfassen, indem man die $\mathfrak{p}_x$, $\mathfrak{p}_y$, $\mathfrak{p}_z$ als die Komponenten eines komplexen Kraftvektors $\mathfrak{p}$, die $\mathfrak{q}_x$, $\mathfrak{q}_y$, $\mathfrak{q}_z$ als die Komponenten eines ebensolchen Momentenvektors $\mathfrak{q}$ betrachtet.

Denken wir uns die Maschine jetzt nicht mehr festgehalten, so führt sie unter dem Einfluß der Massenkräfte Bewegungen aus, die wir als klein im Vergleich zu den Wegen der unausgeglichenen Massen voraussetzen wollen. Die Verschiebungen des Schwerpunktes der Maschine, die wir uns als einen einzelnen starren Körper vorstellen, in Richtung der Koordinatenachse sollen mit $\mathfrak{s}_x$, $\mathfrak{s}_y$, $\mathfrak{s}_z$ nach Größe und Phase, ihre Verdrehungen um die Koordinatenachse mit $\mathfrak{g}_x$, $\mathfrak{g}_y$, $\mathfrak{g}_z$ bezeichnet werden. Dieser Bewegung setzt die Maschinenmasse Trägheitskräfte entgegen, die wir berechnen wollen.

Ist M die Masse der Maschine und sind $\mathfrak{p}_{tx}$, $\mathfrak{p}_{ty}$, $\mathfrak{p}_{tz}$ die Komponenten der Trägheitskräfte in Richtung der 3 Koordinatenachsen, so ist

$$\mathfrak{p}_{tx} = -M \frac{d^2 \mathfrak{s}_x}{dt^2} = M\omega^2 \mathfrak{s}_x, \quad \mathfrak{p}_{ty} = -M \frac{d^2 \mathfrak{s}_y}{dt^2} = M\omega^2 \mathfrak{s}_y, \quad \mathfrak{p}_{tz} = -M \frac{d^2 \mathfrak{s}_z}{dt^2} = M\omega^2 \mathfrak{s}_z \qquad (3).$$

Etwas umständlicher erhält man die bei Drehungen auftretenden Momente $\mathfrak{q}_{tx}$, $\mathfrak{q}_{ty}$, $\mathfrak{q}_{tz}$ der Trägheitskräfte. Sind Θ_x, Θ_y, Θ_z die Trägheits- und Φ_{xy}, Φ_{xz}, Φ_{yz} die Zentrifugalmomente der Maschine um die betreffenden Achsen, so ist

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{q}_{tx} &= -\Theta_x \frac{d^2 \mathfrak{g}_x}{dt^2} + \Phi_{xy} \frac{d^2 \mathfrak{g}_y}{dt^2} + \Phi_{xz} \frac{d^2 \mathfrak{g}_z}{dt^2} = \omega^2 (\Theta_x \mathfrak{g}_x - \Phi_{xy} \mathfrak{g}_y - \Phi_{xz} \mathfrak{g}_z) \\ \mathfrak{q}_{ty} &= +\Phi_{xy} \frac{d^2 \mathfrak{g}_x}{dt^2} - \Theta_y \frac{d^2 \mathfrak{g}_y}{dt^2} + \Phi_{xy} \frac{d^2 \mathfrak{g}_z}{dt^2} = \omega^2 (-\Phi_{xy} \mathfrak{g}_x + \Theta_y \mathfrak{g}_y - \Phi_{yz} \mathfrak{g}_z) \\ \mathfrak{q}_{tz} &= +\Phi_{xz} \frac{d^2 \mathfrak{g}_x}{dt^2} + \Phi_{yz} \frac{d^2 \mathfrak{g}_y}{dt^2} - \Theta_z \frac{d^2 \mathfrak{g}_z}{dt^2} = \omega^2 (-\Phi_{xz} \mathfrak{g}_x - \Phi_{yz} \mathfrak{g}_y + \Theta_z \mathfrak{g}_z) \end{aligned}\right\} \quad . \quad (4).$$

Jede Komponente von $\mathfrak{q}_t$ ist eine lineare Funktion der Komponenten von $\mathfrak{g}$. Diese Art der Abhängigkeit bezeichnet man als lineare Vektorfunktion und zwar handelt es sich hier um eine symmetrische lineare Vektorfunktion, da die symmetrisch zu einer Diagonalen des Koeffizientenschemas liegenden Konstanten jeweils gleich sind.

Bei der wirklich auftretenden Bewegung müssen die bewegenden Kräfte nach Gl. (2) den Trägheitskräften nach Gl. (3) und (4) gleich sein; da auch die letzteren proportional ω^2 sind, fällt ω^2 heraus und man sieht, daß beim Fehlen von Kreiselwirkungen die Größe

der durch gegebene unausgeglichene Massen hervorgerufenen Schwingungsamplitude unabhängig von der Frequenz und umgekehrt proportional der Masse, bezw. bei Drehschwingungen den Trägheitsmomenten der Maschine ist, ein Ergebnis, das auch unmittelbar aus den Schwerpunkts- und Flächensätzen hätte gefolgert werden können. Die durch die unausgeglichenen Massen verursachten inneren Kräfte der Maschine sind dagegen dem Quadrat der Drehzahl proportional und können erhebliche Zuschläge bei der Bemessung der Maschine erforderlich machen.

4. Berücksichtigung der Kreiselwirkung. Kommen in der Maschine umlaufende Massen vor, deren Kreiselwirkung nicht zu vernachlässigen ist, so werden die Verhältnisse wesentlich verwickelter. Wir behandeln zunächst den folgenden, bei den Anwendungen häufigsten Fall: Ein Teil der Maschine (Schwungrad, Welle, Rotor einer elektrischen Maschine usw.), den wir kurz als »Kreisel« bezeichnen wollen, rotiere um eine Achse, die einer Hauptträgheitsachse der Maschine parallel ist. Die oszillierenden Kräfte können entweder von anderen Teilen der Maschine oder von kleinen unausgewuchteten Massen des Kreisels selbst herrühren. Abgesehen von diesen kleinen Exzentrizitäten soll der Kreisel ein symmetrischer sein.

Wir wählen die Achsen des Trägheitsellipsoides der Maschine als Koordinatenachsen und legen die y-Achse parallel zur Drehachse des Kreisels. Es seien Θ_x und Θ_z die Trägheitsmomente der Maschine um die x- und z-Achse mit Einschluß des Kreisels, Θ_y das Trägheitsmoment um die y-Achse ohne Berücksichtigung des Kreisels, Θ_{ky} sei das Trägheitsmoment des Kreisels um seine Drehachse.

Die Translationsschwingungen werden durch den Kreisel nicht beeinflußt. Auch gegen Drehschwingungen um die y-Achse verhält sich die Maschine so, als ob sie das Trägheitsmoment Θ_y hätte, wenn wir annehmen, daß die Drehung des Kreisels um seine Achse keine Kräfte auf die Maschine ausübt. Diese Annahme ist nicht streng richtig, denn die Lagerreibung dämpft die Schwingungen etwas. Stärkere dämpfende Wirkungen für Drehschwingungen des Rotors um seine Achse treten bei elektrischen Maschinen durch Induktionswirkung, bei Dampfturbinen durch Dampfreibung auf. Bei Synchronmaschinen oder bei Einphaseninduktionsmotoren mit ihrem im Takt des Wechselstromes schwankenden Moment können die elektromagnetischen Kräfte aber auch die Ursache der Schwingungen (Pendeln) sein.

Der Kreisel möge mit der Winkelgeschwindigkeit ω_k rotieren, dann ist sein Drall

$$B = B_y = \Theta_{ky}\,\omega_k.$$

Lassen wir die Maschine eine Drehbewegung $d\,g_z$ um die z-Achse ausführen, so tritt infolge des Trägheitsmomentes Θ_z ein Moment $q_{tz}' = -\,\Theta_z \frac{d^2 g_z}{dt^2}$ auf, das der Bewegung entgegenwirkt. Die Drehung der Achse des Kreisels verursacht aber auch Aenderung des Dralles von der Größe $dB = [dg\,B]$, wobei die Klammer das äußere Vektorprodukt bedeutet.

Die Aenderung des Dralles erfordert die Ueberwindung eines widerstehenden Momentes von der Größe $q_{tx}'' = -\,B_y \frac{d g_z}{dt}$. Eine Drehung der Maschine um die Z-Achse verursacht also die Widerstände $q'_{tz} = -\,\Theta_z \frac{d^2 g_z}{dt^2}$ und $q_{tx}'' = -\,B_y \frac{d g_z}{dt}$. In gleicher Weise treten bei Drehung der Maschine um die x-Achse die Widerstände: $q_{tx}' = -\,\Theta_x \frac{d^2 g_x}{dt^2}$ und $q''_{tz} = +\,B_y \frac{d g_x}{dt}$ auf. Setzen wir rein periodische Kräfte und Bewegungen voraus, so erhalten wir in komplexer Darstellung unter Benutzung der Differentialformeln

$$\mathfrak{q}_{tx} = \Theta_x \omega^2 \mathfrak{g}_x - i\,B_y\,\omega\,\mathfrak{g}_z, \qquad \mathfrak{q}_{tz} = i\,B_y\,\omega\,\mathfrak{g}_x + \Theta_z\,\omega^2\,\mathfrak{g}_z \quad . \quad . \quad . \quad (5),$$

wobei die Kreisfrequenz ω der Schwingung aber nicht mit der Winkelgeschwindigkeit ω_k des Kreisels übereinzustimmen braucht. Diese Gleichungen geben in einfacher Weise die bei vorgeschriebenen Bewegungen auftretenden Kräfte, ihre Auflösung nach $\mathfrak{g}_x$ und $\mathfrak{g}_z$ ergibt: $\mathfrak{g}_x = \frac{\Theta_z \mathfrak{q}_{tx} + i \frac{B_y}{\omega} \mathfrak{q}_{tz}}{\Theta_x \Theta_z \omega^4 - B_y^2}$ und $\mathfrak{g}_z = \frac{\Theta_x \mathfrak{q}_{tz} - i \frac{B_y}{\omega} \mathfrak{q}_{tx}}{\Theta_x \Theta_z \omega^2 - B_y^2}$. Das zur Erzeugung der Schwingung erforderliche Moment muß den Trägheitswiderständen entgegengesetzt gleich sein.

Wirkt nur ein Moment $\mathfrak{q}_x = -\mathfrak{q}_{tx}$ um die x-Achse, so ist die entstehende Schwingung $\mathfrak{g}_x = \frac{-\Theta_x}{\Theta_x\Theta_z\omega^2 - B_y^2}\mathfrak{q}_x$ und $\mathfrak{g}_z = \frac{i\frac{B_y}{\omega}}{\Theta_x\Theta_z\omega^2 - B_y^2}\mathfrak{q}_x$, ebenso verursacht das Moment $\mathfrak{q}_z = -\mathfrak{q}_{tz}$ allein die Schwingung $\mathfrak{g}_x = \frac{-i\frac{B_y}{\omega}}{\Theta_x\Theta_z\omega^2 - B_y^2}\mathfrak{q}_z$ und $\mathfrak{g}_z = \frac{-\Theta_z}{\Theta_x\Theta_z\omega^2 - B_y^2}\mathfrak{q}_z$.

Außer der Schwingung um die Achse des Momentes tritt also, wenn Kreiselwirkungen vorhanden sind, noch eine Schwingung um eine zur Momentenachse senkrechte Drehachse auf, die gegen die erstere um 90^0 in der Phase verschoben ist. Beide Schwingungen setzen sich derart zusammen, daß jeder Punkt des Körpers eine Ellipse beschreibt, deren Hauptachsen den Koordinatenebenen parallel sind und die im Sinne der Drehrichtung des Kreisels durchlaufen wird. Für $B_y < \omega\sqrt{\Theta_x\Theta_z}$ haben das die Schwingung verursachende Moment und die entsprechende Komponente der Drehung entgegengesetztes Vorzeichen: Die Maschine verhält sich wie ein Trägheitswiderstand. Für $B_y > \omega\sqrt{\Theta_x\Theta_z}$ haben die beiden Größen gleiches Vorzeichen: die Maschine verhält sich wie ein elastischer Widerstand. Die Schwingungen vergrößern sich mit wachsender Frequenz des anregenden Momentes, solange $\omega < \frac{B_y}{\sqrt{\Theta_x\Theta_z}}$ bleibt. Für $\omega = \frac{B_y}{\sqrt{\Theta_x\Theta_z}}$ werden sie unendlich groß, für $\omega > \frac{B_y}{\sqrt{\Theta_x\Theta_z}}$ nehmen sie mit wachsendem ω wieder ab. Es ergibt sich also, daß ein Kreisel oder ein Kreiselverband der beschriebenen Art eine bestimmte Resonanzfrequenz $\omega_r = \frac{B_y}{\sqrt{\Theta_x\Theta_z}}$ besitzt, ebenso wie eine durch eine elastische Kraft an ihre Ruhelage gebundene Masse.

Setzen wir den Wert des Dralles $B_y = \Theta_{ky}\,\omega_k$ ein, so wird $\frac{\omega_r}{\omega_k} = \frac{\Theta_{ky}}{\sqrt{\Theta_x\Theta_z}}$. Bei einer Maschine mit umlaufenden Teilen ist meistens das Trägheitsmoment des Kreisels um seine Drehachse kleiner als die Trägheitsmomente der Maschine einschließlich Kreisel um die zur Kreiselachse senkrechten Drehachsen. Die Resonanzfrequenz ist in diesem Falle kleiner als die der Drehzahl des Kreisels entsprechende Frequenz.

Wird das schwingungserzeugende Moment durch eine kleine Exzentrizität des Kreisels selbst hervorgebracht, so ist $\omega = \omega_k$ und $B_y = \Theta_{ky}\,\omega$. In diesem Falle ergibt die Rechnung sehr große Schwingungsamplituden, wenn $\Theta_{ky} = \sqrt{\Theta_x\Theta_z}$ ist.

Die Aufstellung der Bewegungsgleichungen für beliebig gelegenes Trägheitsellipsoid und willkürlich gerichtete Drehachse bietet keine neuen Schwierigkeiten. An die Stelle der Gleichungen (5) treten die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{q}_x &= -\mathfrak{g}_x\Theta_x\omega^2 + \mathfrak{g}_y(\Phi_{xy}\omega^2 - B_z i\omega) + \mathfrak{g}_z(\Phi_{xy}\omega^2 + B_y i\omega)\\
\mathfrak{q}_y &= \mathfrak{g}_x(\Phi_{xy}\omega^2 + B_z i\omega) - \mathfrak{g}_y\Theta_y\omega^2 + \mathfrak{g}_z(\Phi_{yz}\omega^2 - B_x i\omega)\\
\mathfrak{q}_z &= \mathfrak{g}_x(\Phi_{xz}\omega^2 - B_y i\omega) + \mathfrak{g}_z(\Phi_{yz}\omega^2 + B_x i\omega) - \mathfrak{g}_z\Theta_z\omega^2
\end{aligned}\right\} \quad (6).$$

Die Auflösung nach $\mathfrak{g}_x$, $\mathfrak{g}_y$ und $\mathfrak{g}_z$ ist nicht schwer, aber recht umständlich. Man erhält $\mathfrak{g}$ als lineare Vektorfunktion von $\mathfrak{q}$. Im allgemeinen Fall, also bei beliebiger Lage des Trägheitsellipsoids und der Kreiselachse hat ein oszillierendes Moment Schwingungen der Maschine zur Folge, bei denen jeder Punkt eine Ellipse beschreibt. Während für reine Translationsschwingungen die Bewegung immer in Richtung der Kraft erfolgt, verursacht ein Moment im allgemeinen auch Schwingungen um Achsen, die senkrecht auf der Achse des Momentes stehen. Diese Schwingungeu können sogar die Schwingungen um die Achse des Momentes an Größe erheblich übertreffen, wenn in der Maschine schnell rotierende Massen vorkommen oder wenn die Achsen ihres Trägheitsellipsoids sehr ungleich sind.

Wird die Maschine elastisch festgehalten, so wird ihre Eigenfrequenz für Drehschwingungen senkrecht zur Kreiselachse durch das Zusammenwirken der elastischen Einspannung und der Wirkung des Kreisels bedingt. Aeußerlich wird man den Einfluß des Kreisels an der Abhängigkeit der Eigenfrequenz von der Drehzahl erkennen. Diese Erscheinung tritt z. B. bei der Auswuchtmaschine von Lawaczek[1]) auf.

---

[1]) F. Lawaczek: »Das Auswuchten raschumlaufender Massen«. Zeitschrift für das gesamte Turbinenwesen, 1911, Heft 28 bis 33.

5. Die Eigenschaften des Fundamentes, Einführung der Fundamentfunktion. Die vorstehenden Ueberlegungen erlauben die Berechnung der Schwingungen der frei beweglichen Maschine; in Wirklichkeit wird sie aber durch das Fundament festgehalten. Meist ist die Maschine durch Ankerschrauben fest mit einem Fundamentblock aus Mauerwerk oder Beton verbunden. Dieser Block ruht auf dem eigentlichen Fundament, das vom gewachsenen Boden oder der Tragkonstruktion eines Gebäudes, etwa einer Betondecke, einem Unterzuge usw. gebildet wird. Die Formänderungen des Fundamentblockes sind meistens klein und seine Verbindung mit der Maschine fest. Wir wollen ihn deshalb mit zur Maschine rechnen. Ist die Formänderuug des Fundamentblockes nicht mehr vernachlässigbar oder ist die Maschine von dem Fundamentblock durch eine federnde Unterlage isoliert, so müssen wir die später durchzuführenden Betrachtungen über dämpfende Unterlagen zu Hilfe nehmen.

Schwingt die Maschine unter dem Einfluß der Kräfte der unausgeglichenen Massen, so übt sie Kräfte auf das Fundament aus, die eine Ausbreitung von elastischen Wellen in ihm zur Folge haben. Die Beziehung zwischen der Schwingungsbewegung der Maschine, die sich auf das Fundament übertragen muß, und den Kräften, die dabei auf das letztere ausgeübt werden, soll nun untersucht werden. Wir sehen hierbei die von der Maschine unter dem Einfluß ihres Gewichtes eingenommene Lage als Ruhelage an. Ueber diese »statische Beanspruchung« des Fundamentes, deren Untersuchung nicht Ziel dieser Arbeit ist, lagern sich die Schwingungsvorgänge ohne unmittelbare gegenseitige Beeinflussung.

Die Bewegungen der Maschine und damit die des Fundamentes an der Auflagerstelle bezeichnen wir wie früher mit $\mathfrak{s}_x$, $\mathfrak{s}_y$, $\mathfrak{s}_z$ und $\mathfrak{g}_x$, $\mathfrak{g}_y$, $\mathfrak{g}_z$. Die auf die einzelnen Flächenelemente des Fundamentes ausgeübten periodischen Kräfte und Momente denken wir uns zu Resultierenden in Richtung der drei Koordinatenachsen zusammengefaßt und bezeichnen sie mit $\mathfrak{p}_{fx}$, $\mathfrak{p}_{fy}$, $\mathfrak{p}_{fz}$ und $\mathfrak{q}_{fx}$, $\mathfrak{q}_{fy}$, $\mathfrak{q}_{fz}$. Wir betrachten zunächst nur die senkrechte Translationsschwingung $\mathfrak{s}_x$. Der zugehörige Kraftvektor $\mathfrak{p}_{fx}$ kann beliebige Größe und beliebige Phasenverschiebungen gegen $\mathfrak{s}_x$ haben.

Verhält sich das Fundament z. B. wie eine vollkommen elastische Feder, deren anderer Endpunkt festgehalten wird, so ist die auf die Feder ausgeübte Kraft der Bewegung in jedem Augenblick proportional, die beiden Vektoren $\mathfrak{s}_x$ und $\mathfrak{p}_{fx}$ sind also gleich gerichtet, und das Verhältnis ihrer Längen ist durch die Zusammendrückbarkeit der Feder gegeben (vergl. Abb. 2a). Andererseits kann sich das Fundament verhalten wie eine mit der Maschine verbundene Masse. In diesem Falle ist die Kraft gleich dem Produkt der Masse und der Beschleunigung des Fundamentes und daher der Richtung des Ausschlages entgegen gerichtet (vergl. Abb. 2b). Im allgemeinen sind diese beiden Grenzfälle nicht erfüllt, sondern die beiden Vektoren werden einen beliebigen Winkel miteinander einschließen (Abb. 2c). Ist dieser Winkel spitz, nähern wir uns also dem Grenzfall der elastischen Feder, so soll das Fundament als »federartig« bezeichnet werden. Ist der Winkel stumpf, so wollen wir von einem »massenartigen« Fundament sprechen. Diese Bezeichnungen gelten aber jeweils nur für eine bestimmte Frequenz. Wie wir später sehen werden, kann ein Fundament seinen Charakter mit der Frequenz ändern.

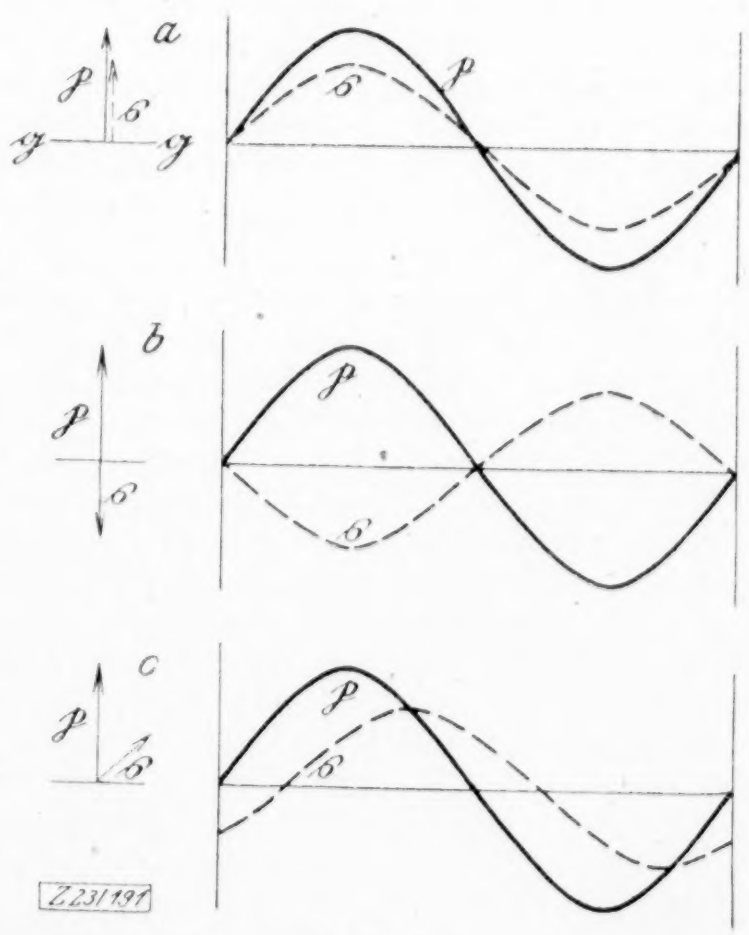


Abb. 2a—c

Verursacht eine schwingende Kraft von der Größe $p = P \cos \omega t$ eine Bewegung von der Größe $s = S \cos (\omega t - \varphi)$, so ist der Augenblickswert der übertragenen Leistung

$$L_a = p \frac{ds}{dt} = - P S \omega \cos \omega t \sin (\omega t - \varphi) = \frac{P S \omega}{2} (\sin \varphi - \sin 2 (\omega t - \varphi)) \quad (7).$$

Die Leistung setzt sich also zusammen aus einem von der Zeit unabhängigen Teil $L = \frac{P S \omega}{2} \sin \varphi$ und einem mit der Frequenz 2ω schwingenden Teil $L_s = -\frac{P S \omega}{2} \sin(2\omega t - \varphi)$. Der schwingende Leistungsanteil verursacht nur ein Hin- und Herpendeln des Energiebetrages $E_s = \int_{\frac{\varphi - \pi}{2\omega}}^{\frac{\varphi}{2\omega}} L_s \, dt = \frac{PS}{2}$ zwischen Maschine und Fundament während jeder Periode.

In vielen Fällen kann man von der Betrachtung dieser pendelnden Energie absehen. Der konstante Betrag der Schwingungsleistung $L = \frac{P S \omega}{2} \sin \varphi$ dagegen, den wir als »Schwingungsleistung« schlechthin bezeichnen wollen, fließt dauernd von der Maschine zum Fundament und wird dort durch innere Reibung in Wärme umgesetzt, oder er wandert in Gestalt elastischer Wellen in die Umgebung hinaus.

Damit der Energiefluß in der Richtung Maschine—Fundament stattfindet, muß der Schwingungsvektor dem Kraftvektor um einen Winkel φ, der zwischen 0 und 180° liegt, nacheilen. Analytisch kann man die Beziehung zwischen $\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{p}$ ausdrücken durch die einfache Gleichung:

$$\mathfrak{s} = C \cdot \mathfrak{p} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8),$$

dabei ist $C = f - d\,i$ eine komplexe Zahl, die wir in ihrer Abhängigkeit von der Frequenz als »Fundamentfunktion« bezeichnen wollen. Durch die Größe C sind die Eigenschaften des Fundamentes vollständig bestimmt, der reelle Teil f ist ein Maß für die Feder- bezw. Massenwirkung des Fundamentes, der imaginäre Teil d bestimmt die Größe der Dämpfung der Schwingung durch Wellenausbreitung. Sind die Größen f und d für alle sechs Freiheitsgrade des Fundamentes als Funktion der Frequenz gegeben, so sind damit alle für die Schwingungen der Maschine maßgebenden Fundamenteigenschaften bekannt.

Man kann diese Größen, wie in einer späteren Arbeit gezeigt werden soll, durch Messungen am Fundament bestimmen [1]). In einfachen Fällen lassen sie sich aber auch aus den Dimensionen und Festigkeitseigenschaften des Fundamentes berechnen. Diese Rechnungen sind etwas umständlich, sie sollen aber trotzdem an einem Beispiel durchgeführt werden, da sie einen guten Einblick in die Verhältnisse geben.

6. Balken als Fundament. Als Beispiel betrachten wir die Schwingungen eines Unterzuges. Die Maschine möge auf einem Träger stehen, der etwa aus Balken, Eisenträgern oder Eisenbeton besteht. Die Enden des Unterzuges sollen in den Mauern eines Gebäudes nachgiebig gelagert sein, derart, daß eine Uebertragung von Schwingungsenergie auf die Wand stattfindet. Die Art der Einspannung des Balkens ist vollständig gegeben, wenn die Beziehung zwischen Kraft und Bewegung der Wand an der Einspannstelle für alle sechs Freiheitsgrade als Funktion der Frequenz bekannt ist. Um nicht zu umständliche Rechnungen zu erhalten, wollen wir diese Beziehungen hier nicht willkürlich annehmen, sondern folgende spezielle Einspannung den weiteren Betrachtungen zugrunde legen, die den Bedingungen einer Wandeinspannung ziemlich nahe kommen wird.

An den Balken von der Länge $2l$ soll sich beiderseits je ein unendlich langes Balkenstück von gleichem Material und ähnlicher, aber n-mal größerer Querschnittsfläche anschließen An der Stoßstelle denken wir uns eine starre Platte eingefügt, welche Verbiegungen der Querschnittsfläche verhindert. In der Mitte des Balkens sollen entsprechend der Wirkung der dort aufgestellt zu denkenden Maschine beliebige, rein periodische Kräfte und Momente angreifen, die wir in Komponenten zerlegen. Wegen der Symmetrie der Anordnung kann man den Balken in der Mitte zerschneiden und an der Endfläche jedes Stückes die Hälfte der Kräfte anbringen. Durch richtige Wahl der Grenzbedingungen muß aber dafür gesorgt werden, daß die Bewegung der Endfläche genau so erfolgt wie vor dem Schnitt. Den Nullpunkt eines rechtshändigen Koordinatensystems legen wir in die Mitte der Fläche, in der unser Balken das eine angesetzte dickere Balkenstück berührt, die z-Achse soll senkrecht nach oben, die positive x-Achse in die Richtung des dicken Balkenendes fallen (vergl. Abb. 3), der Mittelschnitt, an dem die Kräfte angreifen, liegt dann bei $x = -l$.

[1]) Anm. bei der Korrektur: inzwischen erschienen: E. Schmidt, Untersuchungen über Fundamentschwingungen, Zeitschr. d. Ver. d. Ing. 1923, S. 33.

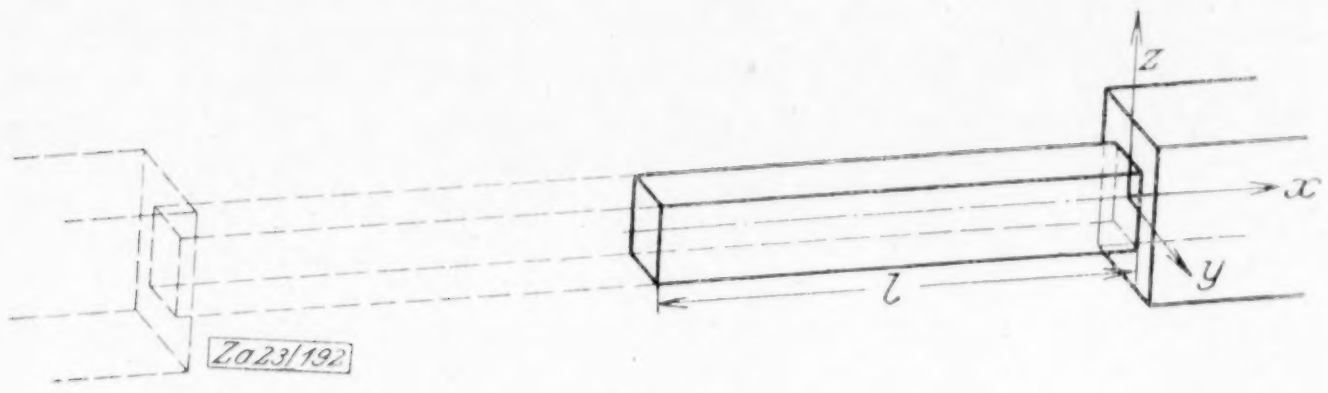


Abb. 3

a) Längsschwingungen. Wir betrachten zunächst die in die Richtung der Balkenachse fallende Komponente der oszillierenden Kraft. Ist E der Elastizitätsmodul, f_1 der Querschnitt des dünnen Balkenteiles, f_2 der Querschnitt des dicken Balkenteiles, u die Bewegung des Balkens in Richtung der positiven x-Achse, ϱ die Masse der Volumeneinheit des Balkenmaterials, t die Zeit, dann gilt für die Längsschwingungen des Balkens bekanntlich die Gleichung

$$c_l^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9).$$

Dabei ist $c_l = \sqrt{\frac{E}{\varrho}}$ die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Längswellen. Die von einem Balkenquerschnitt auf den in Richtung wachsender x benachbarten Querschnitt ausgeübte Kraft hat die Größe $p = -\frac{\partial u}{\partial x} E f$.

Für rein periodische Vorgänge vereinfacht sich die partielle Differentialgleichung (9) zu der gewöhnlichen:

$$c_l^2 \frac{d^2 \mathfrak{u}}{dx^2} = -\omega^2 \mathfrak{u} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9\,\mathrm{a}).$$

Ihre Lösungen kann man darstellen in der Form stehender Wellen: $\mathfrak{u} = \mathfrak{u}_0 \frac{\sin}{\cos} \frac{\omega x}{c_l}$, wobei die Kraft $\mathfrak{p} = \mp \mathfrak{u}_0 E f \frac{\omega}{c_l} \frac{\cos}{\sin} \frac{\omega x}{c_l}$ in Phase mit der Schwingung ist und daher kein Energietransport stattfindet. Man kann die Lösungen aber auch darstellen in der Form fortschreitender Wellen $\mathfrak{u} = \mathfrak{u}_0 e^{\mp i \frac{\omega x}{c_l}}$ mit der Kraft $\mathfrak{p} = \mp i \mathfrak{u}_0 E f \frac{\omega}{c_l} e^{\mp i \frac{\omega x}{c_l}}$, hierbei ist der Kraftvektor gegen den Bewegungsvektor um 90^0 in der Phase verschoben und es findet ein Energietransport in der Richtung der positiven x-Achse vom Betrage

$$L = \frac{\omega}{2} |\mathfrak{p}| \cdot |\mathfrak{u}| = \mathfrak{u}_0^2 E f \frac{\omega^2}{2 c_l} = \mathfrak{u}_0^2 \frac{\sqrt{E \varrho}}{2} f \omega^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

statt.

Die allgemeine Lösung ergibt sich durch Addition von zwei der mit willkürlichen Faktoren multiplizierten obigen Elementarlösungen. In unserem Falle muß die Lösung den folgenden Bedingungen genügen:

1. Im dicken Balken, also für $x > 0$ soll die Schwingung eine reine, in Richtung positiver x fortschreitende Welle sein.

2. In der Mitte des eigentlichen Balkens, also für $x = -l$ soll eine sinusförmige Kraft angreifen.

3. An der Stoßstelle beider Balken, also für $x = 0$ sollen die Bewegungen und Kräfte stetig ineinander übergehen.

Im angesetzten dicken Balken, dem wir den Index 2 geben wollen, genügt die Lösung:

$$\mathfrak{u}_2 = \mathfrak{u}_0 e^{-i \frac{\omega x}{c_l}}, \quad \mathfrak{p}_2 = i \mathfrak{u}_0 E f_2 \frac{\omega}{c_l} e^{-i \frac{\omega x}{c_l}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

der Bedingung 1, wobei $\mathfrak{u}_0$ die Amplitude der fortschreitenden Welle ist.

Im eigentlichen Balken, dem wir den Index 1 zuteilen wollen, lautet die den Bedingungen 2 und 3 genügende Lösung, wie man sich leicht überzeugt:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{u}_1 &= \mathfrak{u}_0 \left[e^{-i \frac{\omega x}{c_l}} - i \frac{f_2 - f_1}{f_1} \sin \frac{\omega x}{c_l} \right] = \frac{\mathfrak{u}_0}{f_1} \left[f_1 \cos \frac{\omega x}{c_l} - i f_2 \sin \frac{\omega x}{c_l} \right] \\ \mathfrak{p}_1 &= i \mathfrak{u}_0 E \frac{\omega}{c_l} \left[f_1 e^{-i \frac{\omega x}{c_l}} + (f_2 - f_1) \cos \frac{\omega x}{c_l} \right] = \mathfrak{u}_0 E \frac{\omega}{c_l} \left[f_1 \sin \frac{\omega x}{c_l} + i f_2 \cos \frac{\omega x}{c_l} \right] \end{aligned}\right\} \quad (12).$$

Die Leistung setzt sich also zusammen aus einem von der Zeit unabhängigen Teil $L = \frac{P S \omega}{2} \sin \varphi$ und einem mit der Frequenz 2ω schwingenden Teil $L_s = -\frac{P S \omega}{2} \sin(2\omega t - \varphi)$. Der schwingende Leistungsanteil verursacht nur ein Hin- und Herpendeln des Energiebetrages $E_s = \int_{\frac{\varphi-\pi}{2\omega}}^{\frac{\varphi}{2\omega}} L_s \, dt = \frac{PS}{2}$ zwischen Maschine und Fundament während jeder Periode.

In vielen Fällen kann man von der Betrachtung dieser pendelnden Energie absehen. Der konstante Betrag der Schwingungsleistung $L = \frac{P S \omega}{2} \sin \varphi$ dagegen, den wir als »Schwingungsleistung« schlechthin bezeichnen wollen, fließt dauernd von der Maschine zum Fundament und wird dort durch innere Reibung in Wärme umgesetzt, oder er wandert in Gestalt elastischer Wellen in die Umgebung hinaus.

Damit der Energiefluß in der Richtung Maschine—Fundament stattfindet, muß der Schwingungsvektor dem Kraftvektor um einen Winkel φ, der zwischen 0 und 180^0 liegt, nacheilen. Analytisch kann man die Beziehung zwischen $\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{p}$ ausdrücken durch die einfache Gleichung:

$$\mathfrak{s} = C \cdot \mathfrak{p} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8),$$

dabei ist $C = f - d\,i$ eine komplexe Zahl, die wir in ihrer Abhängigkeit von der Frequenz als »Fundamentfunktion« bezeichnen wollen. Durch die Größe C sind die Eigenschaften des Fundamentes vollständig bestimmt, der reelle Teil f ist ein Maß für die Feder- bezw. Massenwirkung des Fundamentes, der imaginäre Teil d bestimmt die Größe der Dämpfung der Schwingung durch Wellenausbreitung. Sind die Größen f und d für alle sechs Freiheitsgrade des Fundamentes als Funktion der Frequenz gegeben, so sind damit alle für die Schwingungen der Maschine maßgebenden Fundamenteigenschaften bekannt.

Man kann diese Größen, wie in einer späteren Arbeit gezeigt werden soll, durch Messungen am Fundament bestimmen[1]). In einfachen Fällen lassen sie sich aber auch aus den Dimensionen und Festigkeitseigenschaften des Fundamentes berechnen. Diese Rechnungen sind etwas umständlich, sie sollen aber trotzdem an einem Beispiel durchgeführt werden, da sie einen guten Einblick in die Verhältnisse geben.

6. Balken als Fundament. Als Beispiel betrachten wir die Schwingungen eines Unterzuges. Die Maschine möge auf einem Träger stehen, der etwa aus Balken, Eisenträgern oder Eisenbeton besteht. Die Enden des Unterzuges sollen in den Mauern eines Gebäudes nachgiebig gelagert sein, derart, daß eine Uebertragung von Schwingungsenergie auf die Wand stattfindet. Die Art der Einspannung des Balkens ist vollständig gegeben, wenn die Beziehung zwischen Kraft und Bewegung der Wand an der Einspannstelle für alle sechs Freiheitsgrade als Funktion der Frequenz bekannt ist. Um nicht zu umständliche Rechnungen zu erhalten, wollen wir diese Beziehungen hier nicht willkürlich annehmen, sondern folgende spezielle Einspannung den weiteren Betrachtungen zugrunde legen, die den Bedingungen einer Wandeinspannung ziemlich nahe kommen wird.

An den Balken von der Länge $2l$ soll sich beiderseits je ein unendlich langes Balkenstück von gleichem Material und ähnlicher, aber n-mal größerer Querschnittsfläche anschließen An der Stoßstelle denken wir uns eine starre Platte eingefügt, welche Verbiegungen der Querschnittsfläche verhindert. In der Mitte des Balkens sollen entsprechend der Wirkung der dort aufgestellt zu denkenden Maschine beliebige, rein periodische Kräfte und Momente angreifen, die wir in Komponenten zerlegen. Wegen der Symmetrie der Anordnung kann man den Balken in der Mitte zerschneiden und an der Endfläche jedes Stückes die Hälfte der Kräfte anbringen. Durch richtige Wahl der Grenzbedingungen muß aber dafür gesorgt werden, daß die Bewegung der Endfläche genau so erfolgt wie vor dem Schnitt. Den Nullpunkt eines rechtshändigen Koordinatensystems legen wir in die Mitte der Fläche, in der unser Balken das eine angesetzte dickere Balkenstück berührt, die z-Achse soll senkrecht nach oben, die positive x-Achse in die Richtung des dicken Balkenendes fallen (vergl. Abb. 3), der Mittelschnitt, an dem die Kräfte angreifen, liegt dann bei $x = -l$.

[1]) Anm. bei der Korrektur: inzwischen erschienen: E. Schmidt, Untersuchungen über Fundamentschwingungen, Zeitschr. d. Ver. d. Ing. 1923, S. 33.

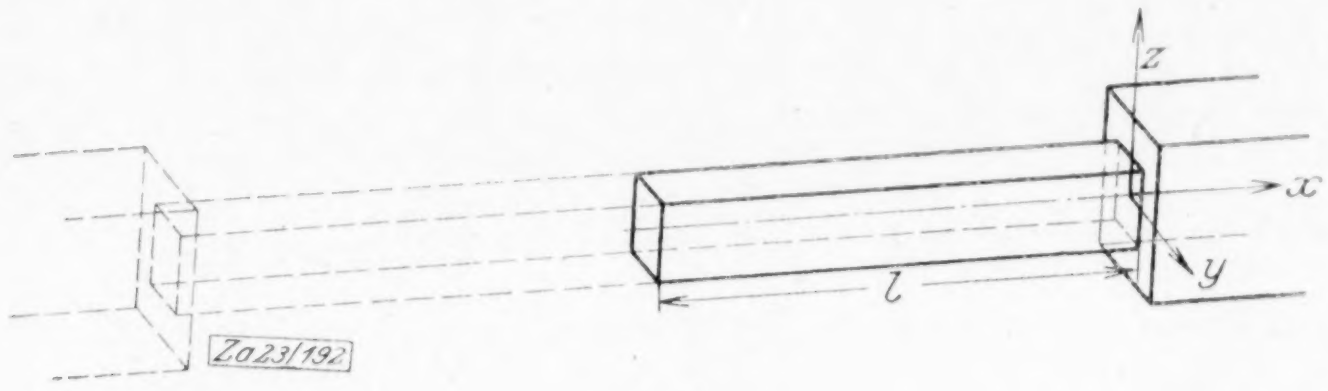


Abb. 3

a) Längsschwingungen. Wir betrachten zunächst die in die Richtung der Balkenachse fallende Komponente der oszillierenden Kraft. Ist E der Elastizitätsmodul, f_1 der Querschnitt des dünnen Balkenteiles, f_2 der Querschnitt des dicken Balkenteiles, u die Bewegung des Balkens in Richtung der positiven x-Achse, ϱ die Masse der Volumeneinheit des Balkenmaterials, t die Zeit, dann gilt für die Längsschwingungen des Balkens bekanntlich die Gleichung

$$c_l^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9).$$

Dabei ist $c_l = \sqrt{\frac{E}{\varrho}}$ die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Längswellen. Die von einem Balkenquerschnitt auf den in Richtung wachsender x benachbarten Querschnitt ausgeübte Kraft hat die Größe $p = -\frac{\partial u}{\partial x} E f$.

Für rein periodische Vorgänge vereinfacht sich die partielle Differentialgleichung (9) zu der gewöhnlichen:

$$c_l^2 \frac{d^2 \mathfrak{u}}{dx^2} = -\omega^2 \mathfrak{u} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9\,\mathrm{a}).$$

Ihre Lösungen kann man darstellen in der Form stehender Wellen: $\mathfrak{u} = \mathfrak{u}_0 \frac{\sin}{\cos} \frac{\omega x}{c_l}$, wobei die Kraft $\mathfrak{p} = \mp \mathfrak{u}_0 E f \frac{\omega}{c_l} \frac{\cos}{\sin} \frac{\omega x}{c_l}$ in Phase mit der Schwingung ist und daher kein Energietransport stattfindet. Man kann die Lösungen aber auch darstellen in der Form fortschreitender Wellen $\mathfrak{u} = \mathfrak{u}_0 e^{\mp i \frac{\omega x}{c_l}}$ mit der Kraft $\mathfrak{p} = \mp i \mathfrak{u}_0 E f \frac{\omega}{c_l} e^{\mp i \frac{\omega x}{c_l}}$, hierbei ist der Kraftvektor gegen den Bewegungsvektor um 90^0 in der Phase verschoben und es findet ein Energietransport in der Richtung der positiven x-Achse vom Betrage

$$L = \frac{\omega}{2} |\mathfrak{p}| \cdot |\mathfrak{u}| = \mathfrak{u}_0^2 E f \frac{\omega^2}{2 c_l} = \mathfrak{u}_0^2 \frac{\sqrt{E \varrho}}{2} f \omega^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

statt.

Die allgemeine Lösung ergibt sich durch Addition von zwei der mit willkürlichen Faktoren multiplizierten obigen Elementarlösungen. In unserem Falle muß die Lösung den folgenden Bedingungen genügen:

1. Im dicken Balken, also für $x > 0$ soll die Schwingung eine reine, in Richtung positiver x fortschreitende Welle sein.

2. In der Mitte des eigentlichen Balkens, also für $x = -l$ soll eine sinusförmige Kraft angreifen.

3. An der Stoßstelle beider Balken, also für $x = 0$ sollen die Bewegungen und Kräfte stetig ineinander übergehen.

Im angesetzten dicken Balken, dem wir den Index 2 geben wollen, genügt die Lösung:

$$\mathfrak{u}_2 = \mathfrak{u}_0 e^{-i \frac{\omega x}{c_l}}, \quad \mathfrak{p}_2 = i \mathfrak{u}_0 E f_2 \frac{\omega}{c_l} e^{-i \frac{\omega x}{c_l}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

der Bedingung 1, wobei $\mathfrak{u}_0$ die Amplitude der fortschreitenden Welle ist.

Im eigentlichen Balken, dem wir den Index 1 zuteilen wollen, lautet die den Bedingungen 2 und 3 genügende Lösung, wie man sich leicht überzeugt:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{u}_1 &= \mathfrak{u}_0 \left[e^{-i \frac{\omega x}{c_l}} - i \frac{f_2 - f_1}{f_1} \sin \frac{\omega x}{c_l} \right] = \frac{\mathfrak{u}_0}{f_1} \left[f_1 \cos \frac{\omega x}{c_l} - i f_2 \sin \frac{\omega x}{c_l} \right] \\ \mathfrak{p}_1 &= i \mathfrak{u}_0 E \frac{\omega}{c_l} \left[f_1 e^{-i \frac{\omega x}{c_l}} + (f_2 - f_1) \cos \frac{\omega x}{c_l} \right] = \mathfrak{u}_0 E \frac{\omega}{c_l} \left[f_1 \sin \frac{\omega x}{c_l} + i f_2 \cos \frac{\omega x}{c_l} \right] \end{aligned}\right\} \quad (12).$$

Setzt man in diesen Gleichungen $x = -l$ und eliminiert u_0, so ergibt sich die für diesen Freiheitsgrad des Fundamentes charakteristische Beziehung zwischen Kraft und Bewegung in der Form

$$C = \frac{u_1}{p_1} = -\frac{l}{f_1 E}\frac{c_l}{\omega l}\frac{\cos\frac{\omega l}{c_l} + i\frac{f_2}{f_1}\sin\frac{\omega l}{c_l}}{\sin\frac{\omega l}{c_l} - i\frac{f_2}{f_1}\cos\frac{\omega l}{c_l}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13).$$

Als wesentliche Größen kommen in dem Ausdruck vor das Verhältnis der beiden Balkenquerschnitte $n = \frac{f_2}{f_1}$ und eine Größe $\varepsilon = \frac{\omega l}{c_l}$, die der Frequenz der Schwingungen proportional ist. Führt man statt der Kreisfrequenz die Schwingungszahl in der Sekunde $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$ ein, so ist ε das 2π-fache des Verhältnisses der halben Balkenlänge zur Wellenlänge der Längswellen von der Schwingungszahl ν.

Um die Beziehung (13) klarer zu erkennen, betrachten wir zunächst den Bruch

$$\frac{\cos\varepsilon + i\,n\sin\varepsilon}{\sin\varepsilon - i\,n\cos\varepsilon},$$

den wir vorübergehend mit k bezeichnen wollen. Die Werte dieses komplexen Ausdruckes für alle ε bei festgehaltenem n liegen auf Kreisen in der Gaußschen Zahlenebene mit dem Radius $\frac{1}{2}\left(n - \frac{1}{n}\right)$ um den Punkt $\frac{i}{2}\left(n + \frac{1}{n}\right)$ als Mittelpunkt. Jedem Wert von ε entspricht ein bestimmter Punkt dieses Kreises. Betrachtet man k als Funktion von n bei festgehaltenem ε, so wandert sein Wert ebenfalls längs Kreisen. Alle zu verschiedenen Werten von ε gehörigen Kreise gehen durch die Punkte $+i$ und $-i$ und schneiden die erstgenannte Kreisschar orthogonal. In Abb. 4 sind beide Kreisscharen für verschiedene Werte von n und ε gezeichnet, aus ihr lassen sich die Werte von k für alle möglichen Fälle entnehmen. Dividieren wir k durch $-\varepsilon = -\frac{\omega l}{c_l}$, so ist damit der gesuchte Wert des Verhältnisses $C = \frac{u_1}{p_1}$ als Funktion von ω, das wir als Fundamentfunktion bezeichnet hatten, bis auf den konstanten Faktor $\frac{l}{f_1 E}$ bekannt; diese Größe ist in Abb. 5

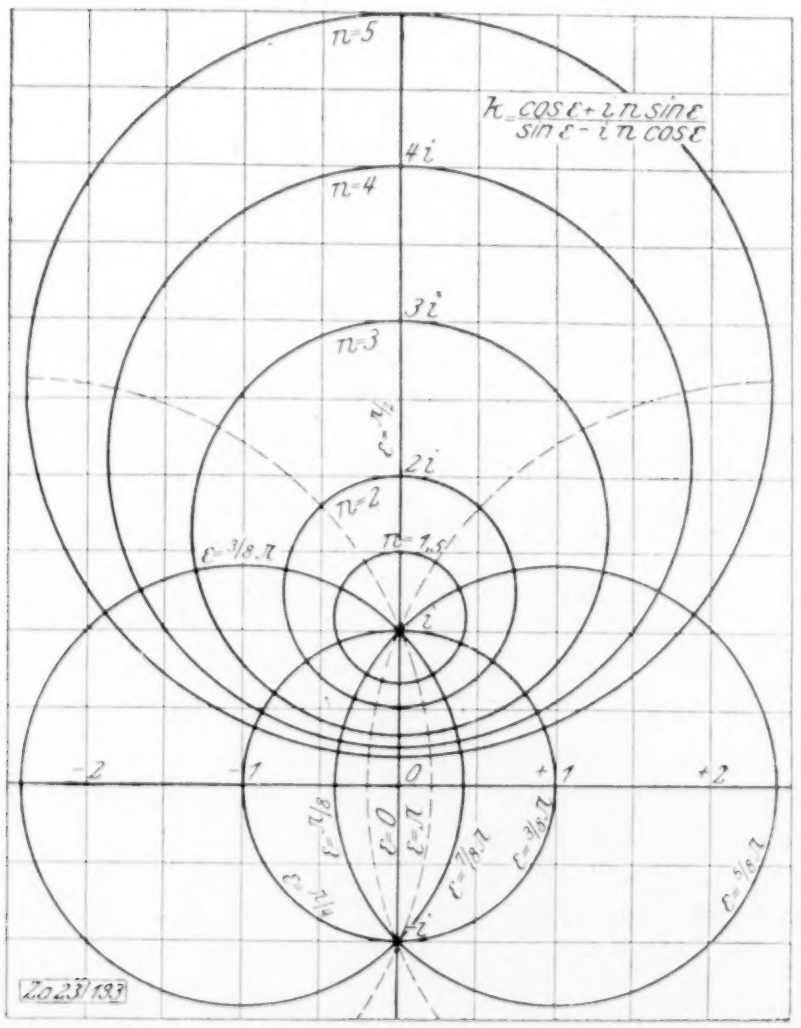


Abb. 4

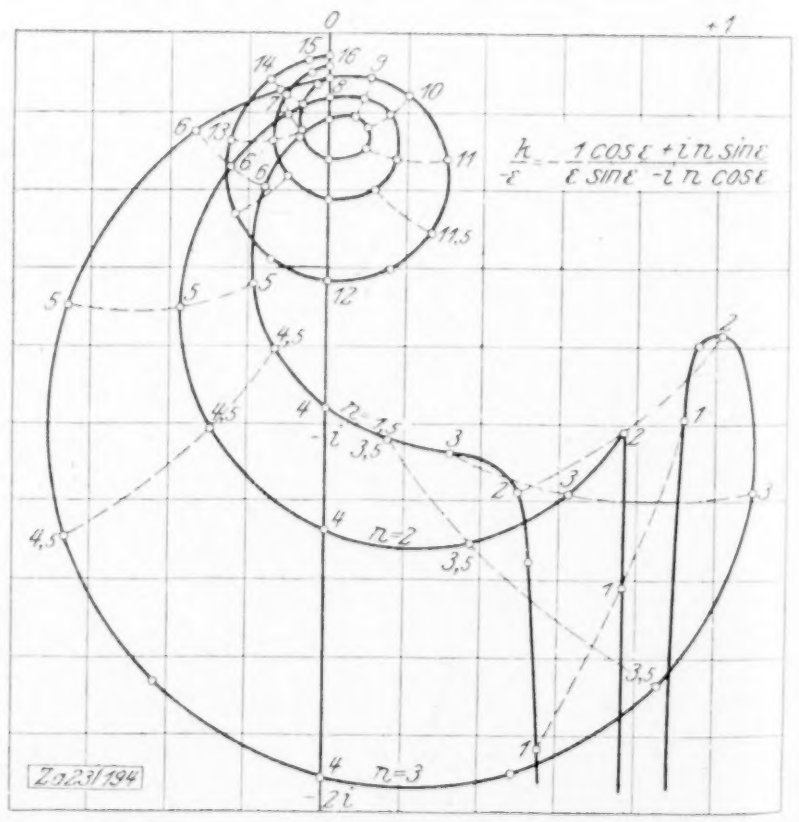


Abb. 5

Die den Kurvenpunkten beigefügten Ziffern geben den zugehörigen Wert von ε gemessen in Vielfachen von $\frac{\pi}{8}$.

für die Werte $n = 1{,}5$, 2 und 3 und $0 < \varepsilon < 2\pi$ gezeichnet. Die Punkte gleichen ε für alle n liegen wieder auf Kreisen, die gestrichelt in die Figur eingetragen sind. Für $\varepsilon > 2\pi$ nähern sich die Kurven in immer kleiner werdenden Schleifen dem Nullpunkt.

Aus der Fundamentfunktion läßt sich das Verhalten des Fundamentes unter der Einwirkung schwingender Kräfte aller Frequenzen ablesen, sie gibt für jede Frequenz unmittelbar die von der oszillierenden Kraft von der Größe 1 hervorgerufene Schwingung nach Größe und Phase.

Stellt man die absolute Größe des Ausschlages, also den Wert $\left|\frac{k}{\varepsilon}\right|$ als Funktion von ε dar, so erhält man die in Abb. 6 gezeichneten Resonanzkurven.

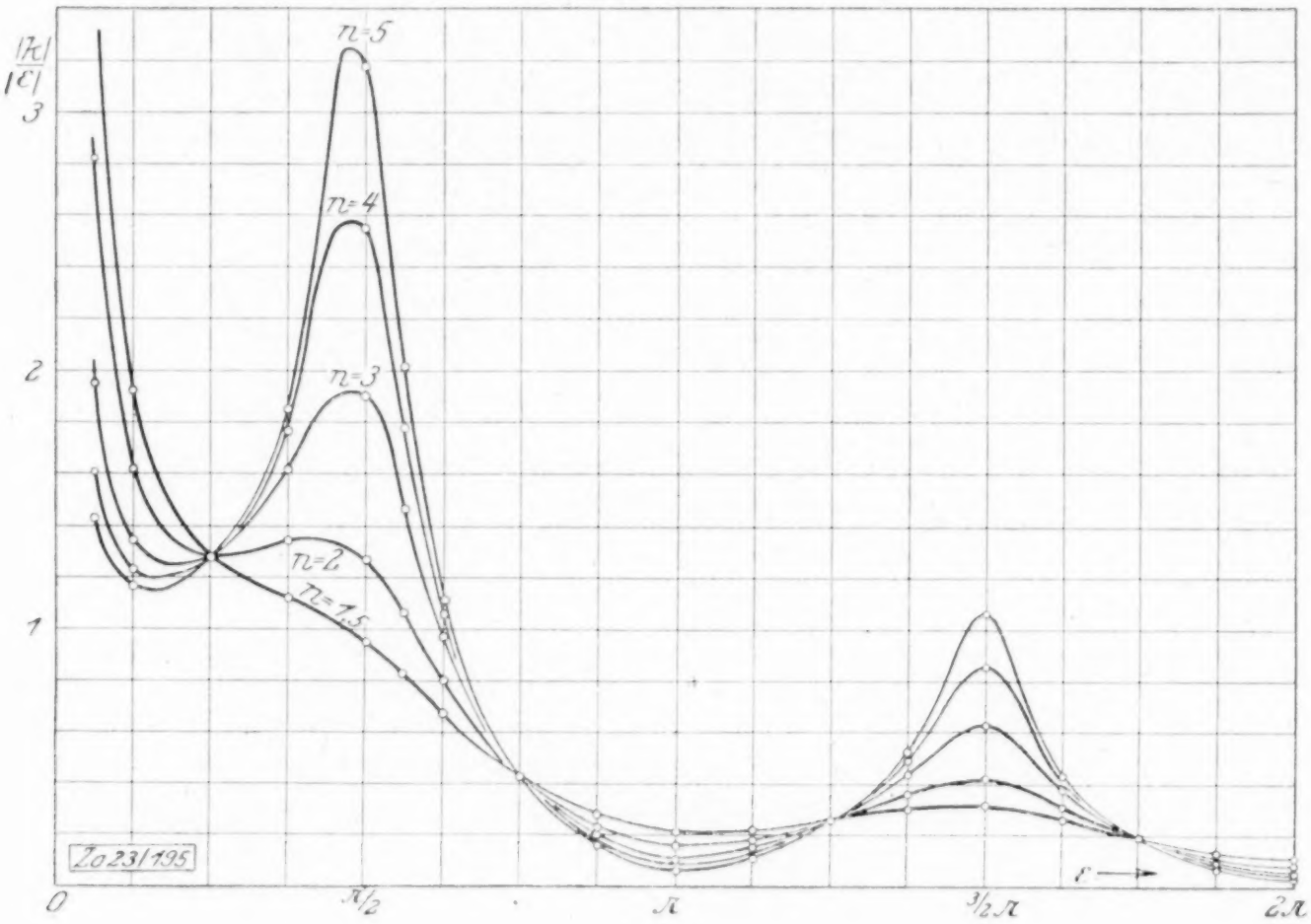


Abb. 6

Die von der Schwingung übertragene Leistung ist

$$L = \frac{c_l}{f_1 E} |\mathfrak{p}_1|^2 \left|\frac{\cos\varepsilon + in\sin\varepsilon}{\sin\varepsilon - in\cos\varepsilon}\right| \sin\varphi \quad \ldots\ldots\ldots \quad (14),$$

wobei φ der Voreilwinkel von $\mathfrak{p}$ gegen $\mathfrak{u}$ ist.

Der für die Abhängigkeit der Schwingungsleistung bei konstanter Kraft wesentliche Ausdruck $\left|\frac{\cos\varepsilon + in\sin\varepsilon}{\sin\varepsilon - in\cos\varepsilon}\right| \sin\varphi$ ist in Abb. 7 als Funktion von ε für den Bereich $0 < \varepsilon < \pi$ aufgetragen, für wachsende ε setzt sich die Funktion mit der Periode π fort.

Bei konstanter Amplitude der schwingenden Kraft wird die fortgeleitete Schwingungsenergie ein Maximum bei Frequenzen, für welche $\varepsilon = \frac{\omega l}{c_l}$ gleich einem ungeraden Vielfachen von $\frac{\pi}{2}$ ist, ein Minimum, wenn ε gleich einem geraden Vielfachen von $\frac{\pi}{2}$ ist. Die Maxima werden um so höher und schmäler, die Minima um so tiefer und breiter, je größer n ist, je fester also die Einspannung ist.

Wird $n = 1$, so haben wir den Grenzfall des unendlich langen Balkens mit gleichbleibendem Querschnitt, die Leistungsresonanzkurve ist eine Gerade.

Wird $n < 1$, d. h. nähern wir uns den Verhältnissen des Balkens mit freien Enden, so treten dort Minima auf, wo früher Maxima waren und umgekehrt. Der Fall ist z. B. möglich für einen Träger mit auf Rollen gelagerten Enden.

b) Verdrehungsschwingungen. Die Verdrehungsschwingungen des Balkens lassen sich in ähnlicher Weise wie die Längsschwingungen behandeln.

Bezeichnen wir mit G den Schubelastizitätsmodul und benutzen im übrigen die gleichen Bezeichnungen wie früher, so ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Verdrehungswellen $c_d = \sqrt{\frac{a\,G}{\varrho}}$, wobei a eine Konstante ist, die von der Verdrehungssteifigkeit der Querschnittsform abhängt; a hat seinen größten Wert 1 bei kreisförmigem Querschnitt, während es z. B. bei I-Profilen nur etwa $^1/_{10}$ bis $^1/_{15}$ erreicht.

Stellen wir das schwingende Moment durch den komplexen Vektor $\mathfrak{q}$, den Verdrehungswinkel in gleicher Weise durch $\mathfrak{g}$ dar und ersetzen wir auch hier die Wirkung der Einspannung durch zwei unendlich lange Balkenstücke von größerem Querschnitt, so lautet die Fundamentfunktion dieses Freiheitsgrades

$$C = \frac{\mathfrak{g}_1}{\mathfrak{q}_1} = -\frac{2\,n\,l}{a\,f_1^{\,2}\,G}\,\frac{c_d}{\omega\,l}\,\frac{\cos\frac{\omega\,l}{c_d} + i\left(\frac{f_2}{f_1}\right)^2 \sin\frac{\omega\,l}{c_d}}{\sin\frac{\omega\,l}{c_d} - i\left(\frac{f_2}{f_1}\right)^2 \cos\frac{\omega\,l}{c_d}} \qquad \ldots\ldots\ldots \quad (15).$$

Die Gleichung hat dieselbe Form wie bei den Längswellen, es tritt nur an Stelle der Querschnittsflächen der Balkenstücke das Quadrat derselben auf. Die Darstellungen der Fundamentfunktion und der Resonanzkurven in Abb. 4 bis 7 können also bei passender Deutung auch für Verdrehungswellen benutzt werden. Infolge der besonders bei geringer Verdrehungssteifigkeit der Querschnittform erheblich kleineren Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Verdrehungswellen treten die Resonanzstellen bei kleineren Drehzahlen auf als bei Längswellen.

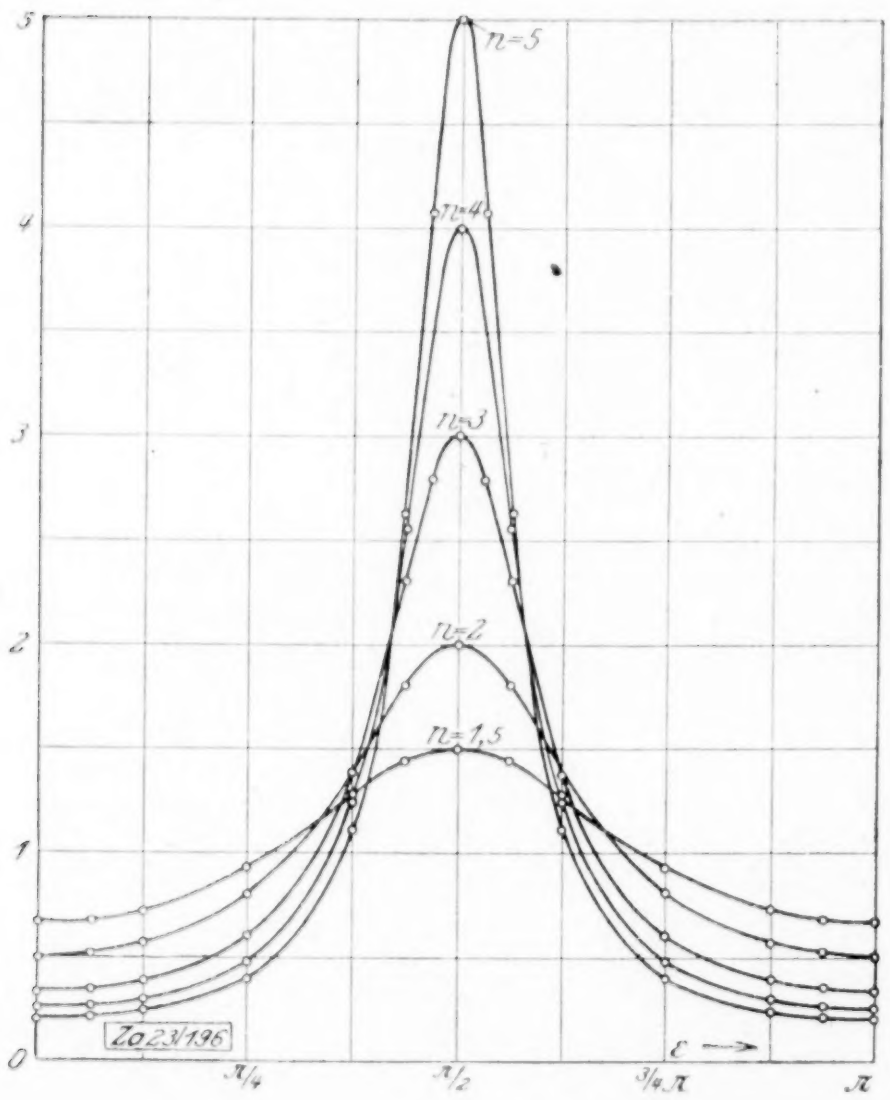


Abb. 7

c) Biegungsschwingungen. Der wichtigste, aber auch der schwierigste Fall der Schwingungsfortpflanzung sind die Biegungsschwingungen. Die Verschiebungen der Maschine senkrecht zur Achse des Balkens verursachen Querschwingungen, bei denen beide Balkenhälften in gleicher Phase schwingen (Biegungsschwingungen 1. Art). Die Drehungen der Maschine um zur Balkenachse senkrechte Achsen rufen Querschwingungen hervor, bei denen beide Balkenhälften in entgegengesetzter Phase schwingen (Biegungssehwingungen 2. Art). Jede der beiden Schwingungsarten ist in zwei zueinander senkrechten Ebenen möglich, so daß die Biegungsschwingungen im ganzen 4 Freiheitsgrade umfassen.

Die Differentialgleichung der Biegungsschwingungen in der Ebene einer Hauptträgheitsachse des Balkenquerschnitts lautet unter den üblichen vereinfachenden Annahmen:

$$\frac{E\,\Theta}{\varrho\,f}\,\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots \quad (16),$$

dabei ist Θ das Trägheitsmoment des Balkenquerschnitts um die zur Biegungsebene senkrechte Schwerpunktsachse, u die Bewegung des Balkens senkrecht zur Achse und die Bedeutung der übrigen Buchstaben die gleiche wie früher. Beschränkt man sich auf Lösungen, die an jedem Ort rein periodische Funktionen der Zeit sind, so geht die partielle Differentialgleichung über in die gewöhnliche

$$\frac{E\,\Theta}{\varrho\,f}\,\frac{d^4\,\mathfrak{u}}{d\,x^4} = \omega^2\,\mathfrak{u} \qquad \ldots\ldots\ldots \quad (16\,a),$$

wobei $\mathfrak{u}$ der komplexe Vektor der Verschiebung ist. Die Drehung wird dargestellt durch den Vektor $\mathfrak{g} = \frac{d\,\mathfrak{u}}{d\,x}$. Zwischen zwei benachbarten Balkenquerschnitten wird das Moment $\mathfrak{q} = -E\,\Theta\,\frac{d^2\,\mathfrak{u}}{d\,x^2}$ und die Schwerkraft $\mathfrak{p} = E\,\Theta\,\frac{d^3\,\mathfrak{u}}{d\,x^3}$ übertragen. Partikularlösungen der Differentialgleichung (16a) nebst den zugehörigen Werten von $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{p}$ und der fortgeführten Wellenleistung L sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt, dabei ist $c = \sqrt[4]{\frac{\omega^2 E\,\Theta}{\varrho\,f}}$ die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Biegungswellen.

$\mathfrak{u}$	$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{q}$	$\mathfrak{p}$	L
$\mathfrak{u}_0 \sin \frac{\omega x}{c}$	$\mathfrak{u}_0 \frac{\omega}{c} \cos \frac{\omega x}{c}$	$\mathfrak{u}_0 E\Theta \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \sin \frac{\omega x}{c}$	$-\mathfrak{u}_0 E\Theta \left(\frac{\omega}{c}\right)^3 \cos \frac{\omega x}{c}$	0
$\mathfrak{u}_0 \cos \frac{\omega x}{c}$	$-\mathfrak{u}_0 \frac{\omega}{c} \sin \frac{\omega x}{c}$	$\mathfrak{u}_0 E\Theta \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \cos \frac{\omega x}{c}$	$\mathfrak{u}_0 E\Theta \left(\frac{\omega}{c}\right)^3 \sin \frac{\omega x}{c}$	0
$\mathfrak{u}_0 \mathfrak{Sin} \frac{\omega x}{c}$	$\mathfrak{u}_0 \frac{\omega}{c} \mathfrak{Cof} \frac{\omega x}{c}$	$-\mathfrak{u}_0 E\Theta \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \mathfrak{Sin} \frac{\omega x}{c}$	$\mathfrak{u}_0 E\Theta \left(\frac{\omega}{c}\right)^3 \mathfrak{Cof} \frac{\omega x}{c}$	0
$\mathfrak{u}_0 \mathfrak{Cof} \frac{\omega x}{c}$	$\mathfrak{u}_0 \frac{\omega}{c} \mathfrak{Sin} \frac{\omega x}{c}$	$-\mathfrak{u}_0 E\Theta \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \mathfrak{Cof} \frac{\omega x}{c}$	$\mathfrak{u}_0 E\Theta \left(\frac{\omega}{c}\right)^3 \mathfrak{Sin} \frac{\omega x}{c}$	0
$\mathfrak{u}_0 e^{\frac{\omega x}{c}}$	$\mathfrak{u}_0 \frac{\omega}{c} e^{\frac{\omega x}{c}}$	$-\mathfrak{u}_0 E\Theta \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 e^{\frac{\omega x}{c}}$	$\mathfrak{u}_0 E\Theta \left(\frac{\omega}{c}\right)^3 e^{\frac{\omega x}{c}}$	0
$\mathfrak{u}_0 e^{\frac{-\omega x}{c}}$	$-\mathfrak{u}_0 \frac{\omega}{c} e^{\frac{-\omega x}{c}}$	$-\mathfrak{u}_0 E\Theta \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 e^{\frac{-\omega x}{c}}$	$-\mathfrak{u}_0 E\Theta \left(\frac{\omega}{c}\right)^3 e^{\frac{-\omega x}{c}}$	0
$\mathfrak{u}_0 e^{i\frac{\omega x}{c}}$	$i\,\mathfrak{u}_0 \frac{\omega}{c} e^{i\frac{\omega x}{c}}$	$\mathfrak{u}_0 E\Theta \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 e^{i\frac{\omega x}{c}}$	$-i\,\mathfrak{u}_0 E\Theta \left(\frac{\omega}{c}\right)^3 e^{i\frac{\omega x}{c}}$	$-\mathfrak{u}_0^2 E\Theta \frac{\omega^4}{c^3}$
$\mathfrak{u}_0 e^{-i\frac{\omega x}{c}}$	$-i\,\mathfrak{u}_0 \frac{\omega}{c} e^{-i\frac{\omega x}{c}}$	$\mathfrak{u}_0 E\Theta \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 e^{-i\frac{\omega x}{c}}$	$i\,\mathfrak{u}_0 E\Theta \left(\frac{\omega}{c}\right)^3 e^{-i\frac{\omega x}{c}}$	$\mathfrak{u}_0^2 E\Theta \frac{\omega^4}{c^3}$

Es haben nur die beiden letzten Lösungsformen den Charakter fortschreitender Wellen und zwar bedeutet $\mathfrak{u}_0 e^{-i\frac{\omega x}{c}}$ eine in Richtung wachsender x fortschreitende Welle, sie überträgt die Wellenleistung:

$$L = \omega\,\mathfrak{u}_0^2 E\Theta \left(\frac{\omega}{c}\right)^3 = \mathfrak{u}_0^2 \sqrt[4]{E\,\Theta\,\varrho^3 f^3}\;\omega^{5/2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (17).$$

Um den Einspannbedingungen des Balkens in der Wand zu genügen, denken wir uns wie früher an die Enden des Balkens 1 an Stelle der Wände zwei unendlich lange Balkenstücke 2 von gleichem Material, aber anderem Querschnitt angesetzt. (Die Bedingung der Materialgleichheit ist keine wesentliche Einschränkung, sie vermindert nur die Zahl der Buchstaben in den Formeln.) An den beiden Unstetigkeitsstellen des Querschnittes sollen wieder starke Platten eingesetzt gedacht werden, welche Verbiegungen der Querschnitte verhindern. In den angesetzten Balkenstücken soll die Bewegung in großer Entfernung von den Stoßstellen den Charakter einer reinen fortschreitenden Welle haben. Legen wir wie früher den Koordinatenanfangspunkt in die Mitte der Stoßstelle mit der positiven x-Achse in Richtung des angesetzten Balkenstückes, so läßt sich die Lösung für $x > 0$ ansetzen in der Form

$$\mathfrak{u}_2 = \mathfrak{u}_0\, e^{-i\frac{\omega x}{c_2}} + \mathfrak{u}_s\, e^{-\frac{\omega x}{c_2}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (18),$$

wobei das erste Glied den fortlaufenden, das zweite Glied den stehenden Wellenteil darstellt und

$$c_2 = \sqrt[4]{\frac{\omega^2 E\,\Theta_2}{\varrho\,f_2}}$$

die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Querwellen im Balken 2 ist. In dieser Welle tritt auf

die Drehung:
$$\mathfrak{g}_2 = -i\,\mathfrak{u}_0 \frac{\omega}{c_2} e^{-i\frac{\omega x}{c_2}} - \mathfrak{u}_0 \frac{\omega}{c_2} e^{-\frac{\omega x}{c_2}},$$

das Moment:
$$\mathfrak{q}_2 = \mathfrak{u}_0 E\Theta_2 \left(\frac{\omega}{c_2}\right)^2 e^{-i\frac{\omega x}{c_2}} - \mathfrak{u}_0 E\Theta_2 \left(\frac{\omega}{c_2}\right)^2 e^{-\frac{\omega x}{c_2}}$$

und die Schwerkraft:
$$\mathfrak{p}_2 = i\,\mathfrak{u}_0 E\Theta_2 \left(\frac{\omega}{c_2}\right)^3 e^{-i\frac{\omega x}{c_2}} - \mathfrak{u}_0 E\Theta_2 \left(\frac{\omega}{c_2}\right)^3 e^{-\frac{\omega x}{c_2}}.$$

Für den eigentlichen Balken, also für $-l < x < 0$, lautet die allgemeine Lösung:

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{u}_1 &= \left(\mathfrak{a}\sin\frac{\omega x}{c_1} + \mathfrak{b}\cos\frac{\omega x}{c_1} + \mathfrak{c}\,\mathfrak{Sin}\frac{\omega x}{c_1} + \mathfrak{d}\,\mathfrak{Cof}\frac{\omega x}{c_1}\right)\\
\mathfrak{g}_1 &= \left(\mathfrak{a}\cos\frac{\omega x}{c_1} - \mathfrak{b}\sin\frac{\omega x}{c_1} + \mathfrak{c}\,\mathfrak{Cof}\frac{\omega x}{c_1} + \mathfrak{d}\,\mathfrak{Sin}\frac{\omega x}{c_1}\right)\frac{\omega}{c_1}\\
\mathfrak{q}_1 &= \left(\mathfrak{a}\sin\frac{\omega x}{c_1} - \mathfrak{b}\cos\frac{\omega x}{c_1} - \mathfrak{c}\,\mathfrak{Sin}\frac{\omega x}{c_1} - \mathfrak{d}\,\mathfrak{Cof}\frac{\omega x}{c_1}\right)\left(\frac{\omega}{c_1}\right)^2 E\Theta\\
\mathfrak{p}_1 &= \left(-\mathfrak{a}\cos\frac{\omega x}{c_1} - \mathfrak{b}\sin\frac{\omega x}{c_1} - \mathfrak{c}\,\mathfrak{Cof}\frac{\omega x}{c_1} - \mathfrak{d}\,\mathfrak{Sin}\frac{\omega x}{c_1}\right)\left(\frac{\omega}{c_1}\right)^3 E\Theta
\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (19).$$

Dabei ist $c_1 = \sqrt[4]{\frac{\omega^2 E\Theta}{\varrho f_1}}$ die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Querwellen im Balken 1 und $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ sind willkürliche komplexe Konstanten, deren Werte aus den Grenzbedingungen des Problems bestimmt werden müssen. Die Grenzbedingungen fordern die Stetigkeit der Bewegungen und Kräfte an den Stoßstellen, also für $x = 0$ 1. $\mathfrak{u}_1 = \mathfrak{u}_2$, 2. $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}_2$, 3. $\mathfrak{q}_1 = \mathfrak{q}_2$, 4. $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}_2$. Dazu kommt noch eine fünfte Grenzbedingung für den Angriffspunkt der Kraft am Balkenende für $x = -l$, wo bei Biegungsschwingungen erster Art nur Verschiebungen auftreten, also $\mathfrak{g}_1 = 0$ sein muß, während bei Biegungsschwingungen zweiter Art nur Drehungen möglich sind, also $\mathfrak{u}_1 = 0$ sein muß. Mit Hilfe dieser 5 Bedingungen lassen sich aus den Gleichungen (18) und (19) die fünf Unbekannten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{u}_0$ bestimmen, so daß die Größen $\mathfrak{u}_1$, $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{q}_1$ und $\mathfrak{p}_1$ nur noch die Unbekannte $\mathfrak{u}_0$ als Faktor enthalten.

Für unseren Zweck interessieren nur die Verhältnisse $\frac{\mathfrak{u}_1}{\mathfrak{p}_1}$ und $\frac{\mathfrak{g}_1}{\mathfrak{q}_1}$ an der Auflagerstelle der Maschine bei $x = -l$, die wir mit $C_\mathfrak{p}$ und $C_\mathfrak{q}$ bezeichnen wollen und die die Fundamentfunktionen für Biegungsschwingungen erster und zweiter Art darstellen. Führt man die etwas umständlichen Rechnungen durch und setzt zur Abkürzung $\frac{c_1}{c_2} = h$, $\frac{\Theta_2}{\Theta_1}\left(\frac{c_1}{c_2}\right)^2 = k$ und $\varepsilon = \frac{\omega l}{c_1}$, so ergibt sich für die Fundamentfunktionen:

$$C_\mathfrak{p} = \frac{\varphi(\varepsilon)}{\left(\frac{\omega}{c_1}\right)^3 E\Theta} = \frac{1}{\left(\frac{\omega}{c_1}\right)^3 E\Theta}\left[\begin{array}{r} 2hk(1+i)\,\mathfrak{Sin}\,\varepsilon\sin\varepsilon + 2k(1+ih^2)\,\mathfrak{Cof}\,\varepsilon\sin\varepsilon \\ \hline h(1-k^2)(1-i) + h(1+k^2)(1-i)\,\mathfrak{Cof}\,\varepsilon\cos\varepsilon + 2k(1-ih^2)\,\mathfrak{Sin}\,\varepsilon\cos\varepsilon \\ -h\left[(1-k)^2 - i(1+k)^2\right]\mathfrak{Sin}\,\varepsilon\cos\varepsilon - 4k\,\mathfrak{Sin}\,\varepsilon\sin\varepsilon \\ -h\left[(1+k)^2 - i(1-k)^2\right]\mathfrak{Cof}\,\varepsilon\sin\varepsilon + 4ih^2k\,\mathfrak{Cof}\,\varepsilon\cos\varepsilon \end{array}\right]$$

$$C_\mathfrak{q} = \frac{\psi(\varepsilon)}{\left(\frac{\omega}{c}\right) E\Theta \quad \left(\frac{\omega}{c_1}\right) E\Theta}\left[\begin{array}{r} +2hk(1+i)\,\mathfrak{Sin}\,\varepsilon\sin\varepsilon + 2k(1+ih^2)\,\mathfrak{Cof}\,\varepsilon\sin\varepsilon \\ \hline h(1-k^2)(1-i) + h(1+k^2)(1-i)\,\mathfrak{Cof}\,\varepsilon\cos\varepsilon + 2k(1-ih^2)\,\mathfrak{Sin}\,\varepsilon\cos\varepsilon \\ h\left[(1+k)^2 - i(1-k)^2\right]\mathfrak{Sin}\,\varepsilon\cos\varepsilon + 4ih^2k\,\mathfrak{Sin}\,\varepsilon\sin\varepsilon \\ -h\left[(1-k)^2 - i(1+k)^2\right]\mathfrak{Cof}\,\varepsilon\sin\varepsilon + 4k\,\mathfrak{Cof}\,\varepsilon\cos\varepsilon \end{array}\right] \quad (20).$$

Diese Ausdrücke enthalten die vollständige Lösung des gestellten Problems unter den gemachten Annahmen, sie sind von recht kompliziertem Bau; sie setzen sich zusammen aus einem reellen Faktor, der nur von der Frequenz und den Eigenschaften des Balkens 1 abhängt und einem komplexen Faktor $\varphi(\varepsilon)$ bezw. $\psi(\varepsilon)$, in den auch die Art der Einspannung, oder was das Gleiche ist, die Dimensionen unseres Ersatzbalkens 2 eingehen.

Um einen Ueberblick über die recht komplizierten Funktionen zu erhalten, wollen wir sie für folgenden speziellen Fall graphisch darstellen: Die Querschnittsfläche f_2 des Balkens 2 soll der des Balkens 1 ähnlich, aber von doppelter linearer Ausdehnung sein, dann ist

$$\frac{f_2}{f_1} = 4,\quad \frac{\Theta_2}{\Theta_1} = 16,\quad h = \frac{c_1}{c_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ und } k = 8.$$

Für diesen Fall werden zunächst die Werte der komplexen Faktoren $\varphi\left(\frac{\omega l}{c_1}\right)$ und $\psi\left(\frac{\omega l}{c_1}\right)$ berechnet und in Abb. 8 und 9 graphisch dargestellt. Die Kurven bestehen aus einer Folge einander benachbarter Schleifen, die sich für nicht zu kleine ε durch einen Kreis darstellen lassen, dessen Mittelpunkt bei $\varphi\left(\frac{\omega l}{c}\right)$ im dritten, bei $\psi\left(\frac{\omega l}{c_1}\right)$ im vierten Quadranten liegen. Mit wachsender Steifigkeit der Einspannung wächst der Radius der Näherungskreise und ihr Mittelpunkt verschiebt sich gleichzeitig ungefähr parallel zur negativ imaginären

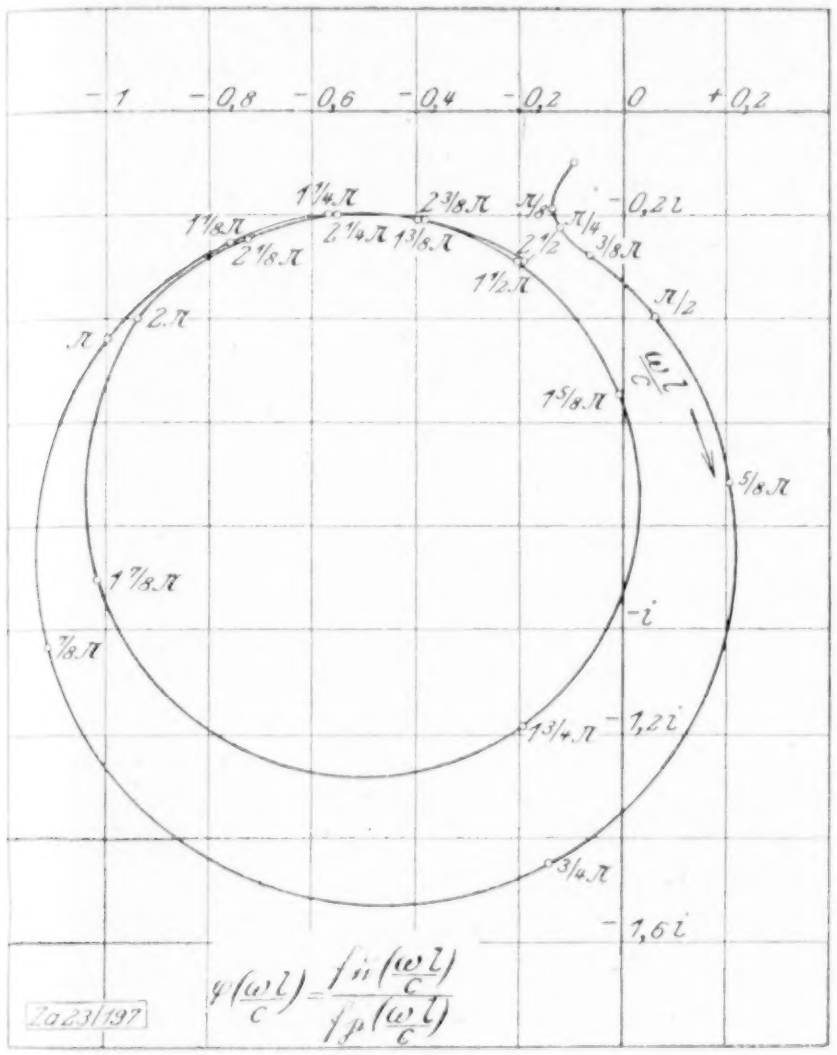


Abb. 8

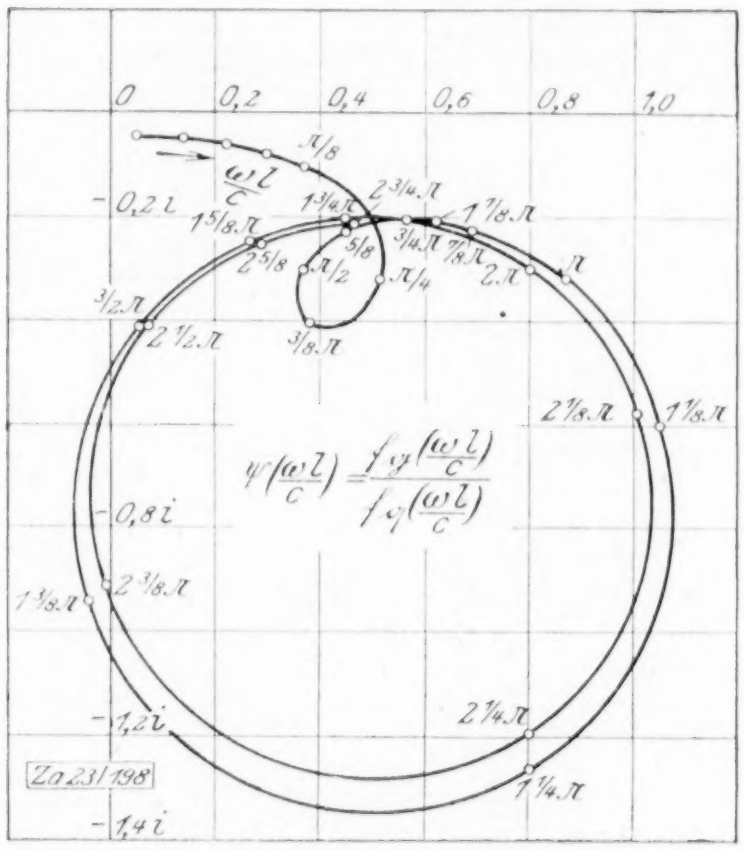


Abb. 9

Halbachse. In großen Zügen ähnelt das Bild dem bei Betrachtung der Längsschwingungen gefundenen. Es ist aber zu beachten, daß $\varepsilon = \frac{\omega l}{c}$ hier nicht der Frequenz ω direkt proportional ist, sondern wegen der Veränderlichkeit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit nach der Gleichung

$$\varepsilon = \frac{\omega l}{c_1} = \sqrt{\omega}\, l \sqrt[4]{\frac{\varrho f_1}{E\Theta}}$$

berechnet werden muß. Aus den Kurven $\varphi\left(\frac{\omega l}{c_1}\right)$ und $\psi\left(\frac{\omega l}{c_1}\right)$ erhält man durch Multiplikation mit den betreffenden reellen Faktoren die Fundamentfunktionen

$$C_{\mathfrak{p}} = \frac{l^3}{E\Theta} \frac{1}{\left(\frac{\omega l}{c_1}\right)^3} \varphi\left(\frac{\omega l}{c_1}\right) \text{ und } C_{\mathfrak{q}} = \frac{l}{E\Theta} \frac{1}{\frac{\omega l}{c_1}} \psi\left(\frac{\omega l}{c_1}\right).$$

In Abb. 10 und 11 sind diese Funktionen bis auf den Maßstabsfaktor $\frac{l^3}{E\Theta}$ und $\frac{l}{E\Theta}$ graphisch dargestellt. Die Kurven zeigen, daß der eingespannte Balken sich gegen Verschiebungen in der Hauptsache »massenartig« verhält, denn der Verschiebungsvektor eilt dem Kraftvektor um einen Winkel nach, der zwischen etwa 90 und 180° liegt. Gegen Verdrehungen verhält der Balken sich jedoch »federartig«, die Verdrehung eilt dem Moment um einen Winkel nach, der ungefähr zwischen 0 und 90° schwankt. Aus den Fundamentfunktionen Abb. 10 und 11 lassen sich die Resonanzkurven ebenso wie bei Längsschwingungen entnehmen.

Die vorstehenden Rechnungen beschreiben unter den eingeführten Voraussetzungen die Eigenschaften des Balkens als Fundament eindeutig und erschöpfend. Der angenommene Ersatz der Wandeinspannung durch die angesetzten dickeren Balkenstücke stimmt aber mit der Wirklichkeit nur unvollkommen überein; denn die Fundamentfunktion wird in diesem Falle für $\varepsilon = 0$ unendlich groß, es müßten also unendlich langsam schwingende Kräfte von endlicher Größe, also z. B. eine konstante Kraft beliebig große Verschiebungen des Balkens zur Folge haben, was in Wirklichkeit nicht der Fall ist. Man könnte diesen Mangel dadurch beseitigen, daß man die Stoßstelle beider Balkenteile durch eine Federkraft an ihre Ruhelage bindet. Auch für eine solche Annahme läßt sich die Rechnung streng durchführen. Die Art der Wandeinspannung wird aber in der Praxis nur in ganz seltenen Fällen so genau bekannt sein, daß man die vorstehende Rechnung mit Erfolg durchführen kann. Das war auch nicht das Ziel der Untersuchung, sondern es sollte an einem speziellen nicht zu komplizierten Fall der allgemeine Charakter der Fundamentfunktionen des Balkens hergeleitet und damit ein Beitrag zum Verständnis und zur Deutung des experimentellen Befundes bei diesen komplizierten Schwingungsvorgängen angegeben werden.

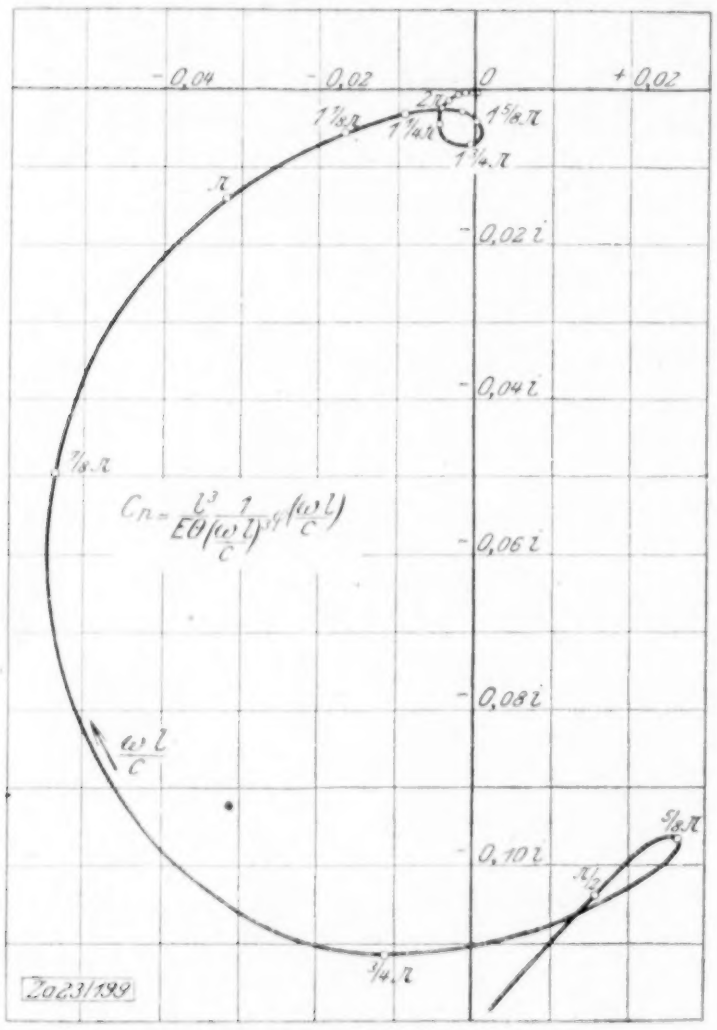


Abb. 10

Die wesentlichen Charakterzüge der Fundamentfunktionen (Definition vergl. S. 168) des Balkens kann man etwa folgendermaßen zusammenfassen:

1. Die Fundamentfunktionen des Balkens lassen sich darstellen durch aufeinander folgende Kurvenschleifen, die mit wachsender Frequenz immer kleiner werden.

2. Der Balken verhält sich bei Längs- und Verdrehungsschwingungen je nach der Frequenz sowohl federnd wie massenartig (Definition vergl. S. 167). Bei Biegungsschwingungen erster Art überwiegt der massenartige Charakter, bei solchen zweiter Art der federartige Charakter.

3. Mit veränderlicher Frequenz, aber konstant bleibender Kraftamplitude ändert sich sowohl die Amplitude als auch die Phasenverschiebung des Bewegungsvektors gegen den Kraftvektor derart, daß der Phasenverschiebungswinkel an den Maximal- und Minimalstellen der Resonanzkurven einen mittleren Wert hat, während er an den dazwischen liegenden Punkten Extremwerte erreicht.

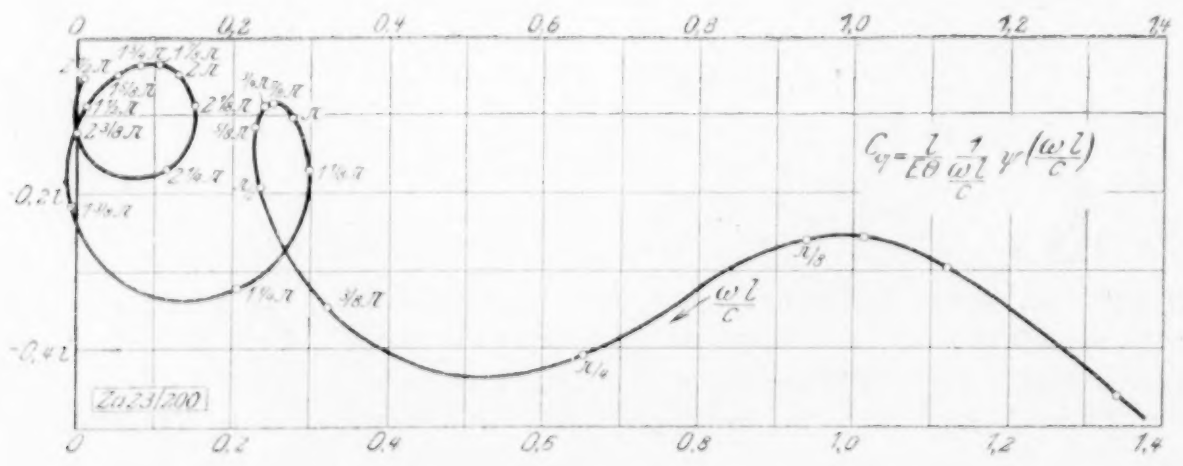


Abb. 11

7. Platte als Fundament. Für kleinere Maschinen dienen oft die Fußbodenplatten der Räume unmittelbar als Fundament, ohne daß besondere Unterzüge eingebaut sind. Besteht die Fußbodenplatte aus einer Balkenkonstruktion, so können wir die Betrachtungen des vorigen Kapitels darauf anwenden. Ist das nicht der Fall, sondern besteht der Boden, wie es oft bei neueren Fabrikbauten der Fall ist, aus einer gleichmäßigen, eisenarmierten Betonplatte, so ließe sich bei kreisförmiger Berandung die mathematische Untersuchung in ähnlicher Weise wie beim Balken durchführen, wenn man als Ersatz für die mathematisch schwer zu erfassenden Auflagerbedingungen am Rande die Platte in das kreisförmige Loch einer unendlich ausgedehnten Platte von größerer Dicke eingesetzt denkt. In ähnlicher Weise wie beim Balken die zyklometrischen und hyperbolischen Funktionen treten hier Zylinderfunktionen reellen und imaginären Argumentes als Elementarlösungen auf, die als Bausteine für die gegebenen Randbedingungen genügende Lösung benutzt werden können, aber diese Bedingungen werden hier sehr kompliziert, so daß die Rechnung nicht durchgeführt werden soll, zumal dieser Fall praktisch kaum vorkommen dürfte. Wichtiger ist der Fall der rechteckigen Platte, der sich aber nicht mehr in geschlossener Form lösen läßt [1]).

8. Der elastische Halbraum als Fundament. Dieser Fall liegt vor, wenn der Fundamentblock der Maschine in den Erdboden eingelassen ist, er sendet dann elastische Halbkugelwellen in die Erde aus. Ist das Erdreich homogen, und sind seine elastischen Konstanten bekannt, so kann man unter speziellen Voraussetzungen den Vorgang der Wellenausbreitung bis in alle Einzelheiten berechnen. Nimmt man nämlich an, daß der Fundamentblock die Gestalt einer in den Boden eingebetteten Halbkugel habe, welche rein periodische Schwingungen ausführt, so ergeben sich die Wellen im Erdboden durch Uebereinanderlagerung von elastischen Halbkugelwellen mit Rayleighschen Oberflächenwellen. Sind die ausgesandten elastischen Wellen bekannt, so kann die Fundamentfunktion berechnet werden. Die Rechnungen sind sehr umfangreich und sollen deshalb hier nicht wiedergegeben werden. Wir wollen uns darauf beschränken, ohne großen mathematischen Aufwand einige Haupteigenschaften der Fundamentfunktion abzuleiten:

Für unendlich langsame Schwingungen verhält sich der elastische Halbraum erfahrungsgemäß wie eine elastische Feder, die vielleicht etwas elastische Nachwirkung und Hysterese besitzt. Der Vektor der Verschiebung hat also gleiche Phase mit dem Vektor der oszillierenden Kraft oder er eilt ihm um einen kleinen Winkel nach. Werden die Schwingungen schneller, so tritt zu der Dämpfung durch elastische Nachwirkung noch eine Dämpfung durch Wellenausbreitung und die Phasennacheilung der Bewegung gegen die Kraft wächst. Steigt die Frequenz derart, daß die ihr im elastischen Halbraume entsprechende Wellenlänge klein gegen die Längendimensionen des Fundamentblockes wird, so breiten sich die Wellen annähernd wie ebene Longitudinalwellen aus, in denen der Schwingungsvektor dem Kraftvektor um 90° nacheilt. Dabei nimmt die von einer konstanten Kraftamplitude hervorgerufene Schwingungsamplitude mit wachsender Frequenz ab. Die Fundamentfunktion des elastischen Halbraumes stellt somit eine Kurve dar, welche von einem bestimmten, der Frequenz 0 entsprechenden Punkte der reellen Achse beginnt, mit wachsender Frequenz den vierten Quadranten durchläuft, um schließlich bei sehr hohen Werten der Frequenz tangential zur negativ imaginären Halbachse den Nullpunkt zu erreichen, etwa wie Abb. 12 zeigt. Man erkennt, daß der elastische Halbraum immer federartigen Charakter haben muß.

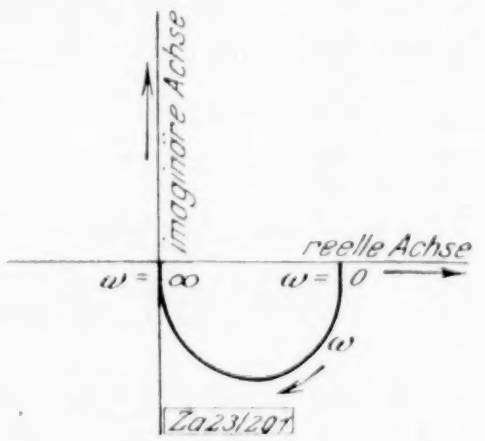


Abb. 12

9. Die Wirkung dämpfender Unterlagen. Legt man zwischen Maschine und Fundament eine elastische Unterlagsplatte, so wird dieselbe durch das Gewicht der Maschine und durch den Zug der Ankerschrauben eine Beanspruchung erfahren, die wir als »statische Belastung« bezeichnen wollen. Darüber lagern sich periodisch veränderliche Kräfte, welche von den Schwingungen der Maschine verursacht werden, und die

[1]) Die experimentelle Ermittlung der Fundamentfunktion für eine rechteckige Eisenbetonplatte ist in der auf S. 168 Fußnote angeführten Arbeit durchgeführt.

wir »dynamische Belastung« nennen. In praktischen Fällen ist die Amplitude der dynamischen Belastung stets kleiner als die statische Belastung.

Wir wollen die Unterlagsplatte zunächst als vollkommen elastisch voraussetzen. Sie braucht nicht dem Hookeschen Gesetze zu gehorchen, aber es soll auch bei schnell veränderlichen Vorgängen die Formänderung in jedem Augenblick eindeutig durch die Kraft gegeben sein. Wenn das Hookesche Gesetz nicht gilt, so soll die Amplitude der dynamischen Belastung so klein sein daß innerhalb des Bereichs der periodischen Schwankungen annähernd eine lineare Beziehung zwischen Kraft und Formänderung gilt, es soll also die Elastizitätskurve in diesem Intervall durch ein Geradenstück ersetzbar sein. Die Tangente e des Neigungswinkels des Geradenstückes wollen wir als »Federung« der Unterlage bezeichnen, sie ist gleich dem Verhältnis der Formänderung zur verursachenden Kraft.

Besteht die Platte aus einheitlichem Material und ist E der Elastizitätsmodul, f die Fläche, D die Dicke der Platte, so ergibt sich bei reiner Druckbeanspruchung und ungehinderter Querdehnung die Federung nach der Formel

$$e = \frac{1}{E}\,\frac{D}{f} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21).$$

Ist die Querdehnung völlig verhindert, wie z. B. bei Platten, deren Dicke klein gegen ihre Flächenabmessungen ist, so wird

$$e = \frac{1}{E}\,\frac{D}{f}\,\frac{m^2 - m - 2}{m^2 - m} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22),$$

wobei m die Poissonsche Verhältniszahl ist. Da m bei allen Körpern größer als 2 ist, wird ein Material durch Verhinderung der Möglichkeit der Querdehnung härter. Für dünne Platten ist also die Federung nach Gl. (22) der Dicke proportional. Erst wenn die Dicke die Größenordnung der Flächenausdehnung der Platte erreicht, tritt die Möglichkeit der Querdehnung hervor und die Federung nimmt stärker zu, als der Formel (22) entspricht, um schließlich bei ganz unbehinderter Querdehnung dem Gesetz der Formel (21) zu gehorchen. Dient eine Federkonstruktion als Unterlage, so muß die Federung aus der Bauart berechnet werden.

Die Wirkung vollkommen elastischer Unterlagen läßt sich bei rein periodischen Vorgängen mit Hilfe unserer Vektordarstellung beschreiben:

Die Maschine möge die Schwingungsbewegung $\mathfrak{s}_1$ ausführen und auf die Unterlagsplatte mit der Kraft $\mathfrak{p}_1$ wirken; die Platte soll ihrerseits auf das Fundament die Kraft $\mathfrak{p}_2$ ausüben und dasselbe zur Schwingung $\mathfrak{s}_2$ anregen. Ist die Dicke der Platte klein gegen die Wellenlänge der betreffenden elastischen Schwingung in ihr, so wird $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}_2 = \mathfrak{p}$ und die Dickenänderung $\mathfrak{d}$ der Platte ist nach der Größe und Phase gegeben durch die Vektorgleichung $\mathfrak{d} = \mathfrak{s}_1 - \mathfrak{s}_2 = e\,\mathfrak{p}$ . . . . . (23).

Setzt man die Beziehung zwischen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{s}_2$, welche der Fundamentfunktion entnommen werden kann, als bekannt voraus, so ergibt sich $\mathfrak{s}_1$ als geometrische Summe von $\mathfrak{s}_2$ und $\mathfrak{d} = e\,\mathfrak{p}$. In Abb. 13 sind die Vektordiagramme für ein federartiges und ein massenartiges Fundament gezeichnet.

Es liegt nahe, das Verhältnis der Schwingungsamplitude $\frac{|\mathfrak{s}_1|}{|\mathfrak{s}_2|}$ vor und hinter der Unterlagsplatte als Maß der schwingungsdämpfenden Wirkung zu benutzen. Betrachten wir den Wert dieses Verhältnisses, das wir als Dämpfungsfaktor bezeichnen wollen, in Abhängigkeit von der Federung der Platte, so ergibt sich, daß für federartige Fundamente der Dämpfungsfaktor mit wachsender Federung der Zwischenlage zunimmt, für massenartige Fundamente dagegen nimmt er zunächst ab, um erst von einer bestimmten Federung an wieder zu steigen. Da die Federung mit der Plattendicke wächst, so verursachen dünne elastische Unterlagen bei massenartigen Fundamenten eine Verstärkung der Fundamentschwingungen, erst von einer bestimmten Dicke an zeigt sich die gewollte dämpfende Wirkung. Man erkennt, daß der Dämpfungsfaktor keine Konstante der Unterlagsplatte ist, sondern daß er wesentlich vom Fundament mit bestimmt wird. Trägt man für verschiedene jeweils konstante Phasenverschiebungen von $\mathfrak{p}_2$ und $\mathfrak{s}_2$ den Dämpfungsfaktor als Funktion der Federung der Unterlage auf, so erhält man eine Schar von Hyperbeln, von denen einige in Abb. 14 gezeichnet sind.

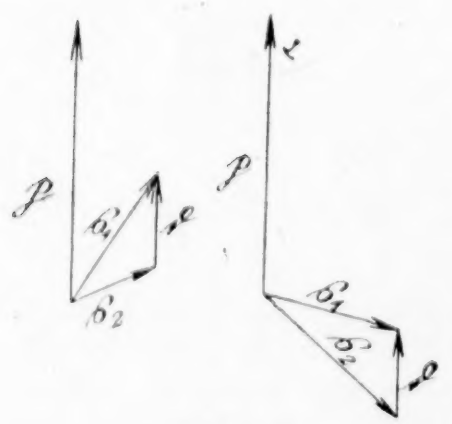


Abb. 13

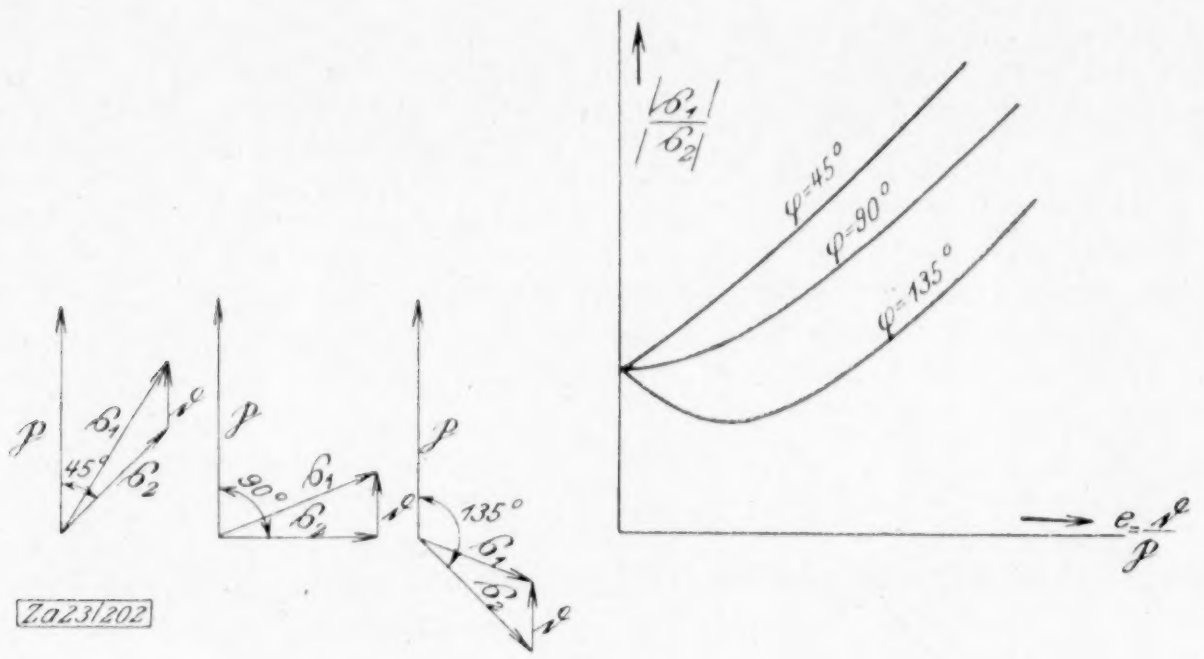


Abb. 14

Die meisten zur Schwingungsdämpfung verwandten Stoffe sind aber nicht vollkommen elastisch, sondern sie wandeln einen Teil der zugeführten Formänderungsarbeit in Wärme um; für sie gilt eine kompliziertere Beziehung zwischen Kraft und Formänderung. Trägt man in einem rechtwinkligen Koordinatensystem die Kraft als Ordinate und die Formänderung als Abszisse auf, so wird das Hookesche Gesetz durch eine Gerade durch den Nullpunkt dargestellt. Während einer Periode der Schwingung pendelt der darstellende Punkt auf dieser Geraden. Ist das Hookesche Gesetz nicht erfüllt, aber das Material noch vollkommen elastisch, so tritt an Stelle der Geraden eine Kurve. Wird bei der Schwingung ein Teil der Formänderung in Wärme umgesetzt, so muß das doppelt durchlaufene Kurvenstück sich zu einer Schleife verbreitern, deren Flächeninhalt ein Maß für die in Wärme umgesetzte Energie ist. Diese Schleife, die wir »Dämpfungsschleife« nennen wollen, kennzeichnet das Verhalten eines Materials unter dem Einfluß periodisch wirkender Kräfte.

Die Dämpfungsschleife entsteht durch das Zusammenwirken der elastischen Nachwirkung und der elastischen Hysterese. Bei unvollkommenen elastischen Körpern tritt zwar auch der größte Teil der einer bestimmten Belastung entsprechenden Formänderung nach sehr kurzer Zeit ein, aber die Formänderung setzt sich langsam fort, um asymptotisch einem Grenzwert zuzustreben. Diese Erscheinung nennt man »elastische Nachwirkung«. Erreicht man den gleichen Belastungszustand einmal von kleineren Belastungen her, das andere Mal von größeren Belastungen ausgehend, so wird, auch wenn das Abklingen der elastischen Nachwirkung abgewartet wird, im ersten Falle bei manchen Stoffen eine kleinere Formänderung als im zweiten auftreten. Diese Erscheinung entspricht der magnetischen Hysterese und wird daher auch als »elastische Hysterese« bezeichnet. Für unendlich langsame Schwingungen würde die Dämpfungsschleife die reine Hysterese darstellen. Die elastische Nachwirkung stört in ganz ähnlicher Weise die elastische Hysterese, wie das Auftreten von Wirbelströmen im Eisen die magnetische Hystereseschleife verändert.

Ueber die Form der Dämpfungsschleife kann nur der Versuch entscheiden. Wir wollen jedoch für die theoretische Behandlung folgende vereinfachte Voraussetzungen machen:

Eine rein periodische Kraft soll auch in einem unvollkommen elastischen Körper eine rein periodische Formänderung hervorrufen, aber dieselbe soll nicht gleichphasig mit der Kraft sein, sondern ihr um den Winkel φ in der Phase nacheilen. Wir können dann die Gleichung (23) als Ausdruck der Beziehung zwischen Kraft und Formänderung beibehalten, wenn wir an Stelle der Federung die komplexe Größe

$$w = e - id \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24),$$

die wir als »Weichheit« bezeichnen wollen, einführen, wobei der reelle Teil e wie früher die »Federung« und der imaginäre Teil d die »Dämpfung« des Materials heißen möge. Diese beiden Größen sind im Gegensatz zu dem früher eingeführten Dämpfungsfaktor wirkliche, für die Bewertung des Unterlagsmaterials maßgebende Materialkonstanten.

Der Schwingungsvorgang läßt sich ebenso wie bei vollkommen elastischen Unterlagen durch ein Vektordiagramm (Abb. 15a) darstellen, das sich von Abb. 13 nur durch die Phasennacheilung von $\mathfrak{d}$ gegen $\mathfrak{p}$ unterscheidet. Die Dämpfungsschleife wird erhalten, indem man zusammengehörige Augenblickswerte von $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{p}$ in einem rechtwinkligen Koordinatensystem aufträgt (Abb. 15b). Da beide Komponenten der Kurve rein periodisch mit gleicher Frequenz schwanken, ist dieselbe eine Ellipse. Erreicht die Kraft ihren Maximalwert, so hat die Formänderung $\mathfrak{d}$ die Größe OA' (Punkt 1 der Abb. 15b), wird die Kraft Null, so ist die Formänderung $= AA'$ (Punkt 2 der Abb. 15b).

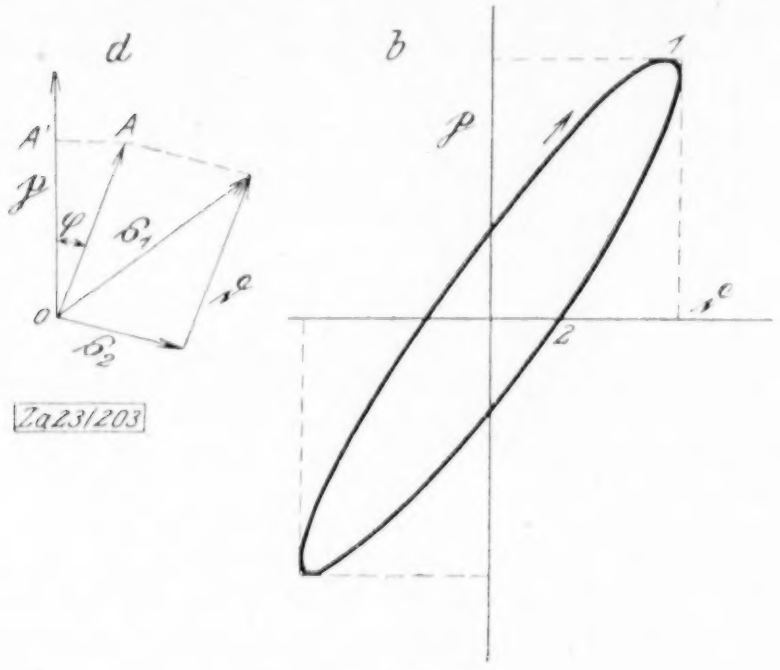


Abb. 15a/b

Die Berechtigung der vorstehenden vereinfachten Annahmen beweisen Versuche, welche in einer späteren Arbeit veröffentlicht werden sollen und bei denen die Dämpfungsschleife auf rein experimentellem Wege für alle untersuchten Stoffe als Ellipse erhalten wurde[1]).

10. Theoretische Behandlung eines allgemeinen Falles. Aus den vorstehenden Untersuchungen geht hervor, daß für die Schwingungsvorgänge wesentlich sind: 1. die schwingungserzeugenden Kräfte in der Maschine; 2. Masse, Trägheitsmomente und Drall der Maschine; 3. die Fundamentfunktion, d. h. die Beziehung zwischen Kraft und Schwingungsbewegung für das Fundament; 4. die Weichheit der dämpfenden Unterlage. Sind diese vier Größen für alle Freiheitsgrade als Funktion der Frequenz bekannt, so kann die auftretende Schwingung vollständig voraus berechnet werden, und zwar am einfachsten graphisch mit Hilfe des komplexen Vektordiagramms. Die Art der Berechnung soll an einem einfachen Beispiel gezeigt werden.

Auf einem Fundament stehe unter Zwischenschaltung einer dämpfenden Unterlage eine Maschine, in der eine oszillierende Vertikalkraft von gegebener Größe $\mathfrak{p}$ auftritt. Die Massenverteilung der Maschine und die Fundamenteinspannung seien derart, daß die Vertikalkraft nur eine vertikale Translationsschwingung zur Folge hat. Zur Berechnung des Schwingungsvorganges gehen wir aus von dem willkürlich angenommenen Vektor $\mathfrak{p}_2$ der auf das Fundament wirkenden Kraft (vergl. Abb. 16). Aus der Fundamentfunktion entnehmen wir den zur Kraft $\mathfrak{p}_2$ bei der gegebenen Frequenz gehörigen Vektor $\mathfrak{s}_2$ der Fundamentbewegung (in der Abbildung ist ein massenartiges Fundament vorausgesetzt). Die Kraft $\mathfrak{p}_2$ verursacht in der dämpfenden Unterlage von der Weichheit w die Zusammendrückung $\mathfrak{d} = w\mathfrak{p}_2$. Addiert man $\mathfrak{d}$ vektoriell zu $\mathfrak{s}_2$, so ist die Summe $\mathfrak{s}_1 = \mathfrak{s}_2 + \mathfrak{d}$ die Schwingung der Maschine nach Größe und Phase. Um diese Schwingung gegen den Trägheitswiderstand der Maschinenmasse $\mathfrak{p}_t = m\omega^2\mathfrak{s}_1$ aufrecht zu erhalten, ist eine Kraft $-\mathfrak{p}_t$ erforderlich. Im ganzen muß also zur Erzeugung der angenommenen Schwingung von der Maschine eine oszillierende Kraft $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}_2 - \mathfrak{p}_t$ aufgebracht werden. Diese Konstruktion ist in Abb. 16 durchgeführt.

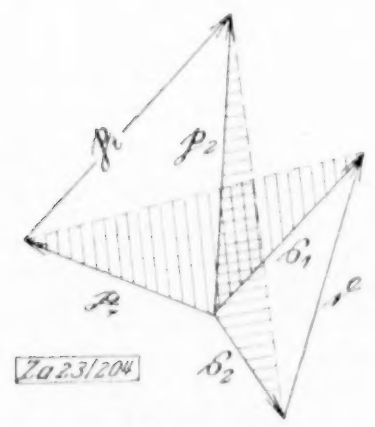


Abb. 16

In Wirklichkeit ist nicht die Kraft am Fundament, sondern die oszillierende Kraft in der Maschine gegeben. Um die Schwingung für diesen Fall zu ermitteln, braucht man das gezeichnete Diagramm nur ähnlich mit sich selbst zu vergrößern oder zu verkleinern bezw. seinen Maßstab so zu ändern, daß $\mathfrak{p}_1$ den gegebenen Wert $\mathfrak{p}$ annimmt. Der Einfluß der Erhöhung der Weichheit der Unterlage und der Vermehrung der Maschinenmasse bei konstanter Frequenz läßt sich an Hand des Diagrammes vollständig verfolgen, wenn dasselbe wiederholt für verschiedene Werte der Vektoren $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{p}_t$ kon-

[1]) Vergl. S. 161 Fußnote.

struiert. Will man den Schwingungsvorgang für eine andere Frequenz untersuchen, so braucht man nur das entsprechende Wertepaar $\mathfrak{p}_2$, $\mathfrak{s}_2$ aus der Fundamentfunktion zu entnehmen und kann das Diagramm konstruieren; dabei ist zu bedenken, daß der Vektor der Trägheitskräfte $\mathfrak{p}_t$ von ω abhängt. Das von den Vektoren $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{s}_1$ gebildete Dreieck ist ein Maß für die von der Maschine während einer Periode der Schwingung geleistete Arbeit. Das Dreieck $\mathfrak{p}_2$, $\mathfrak{s}_2$ gibt die an das Fundament abgegebene Arbeit. Die Differenz beider Dreiecke oder — was dasselbe ist — das von den Vektoren $\mathfrak{p}_2$ und $\mathfrak{d}$ gebildete Dreieck mißt die durch die dämpfende Wirkung der Unterlage während einer Schwingung in Wärme umgewandelte Energie. Hat die Maschine mehrere Schwingungsmöglichkeiten, so ist die vorstehende Rechnung für jeden Freiheitsgrad durchzuführen.

225

Über den Strömungswiderstand hochverdichteter Luft in Rohrleitungen.

Von **MAX WILDHAGEN** in Mannheim.

[Nach Versuchen im Kaiser-Wilhelm-Institut für physikalische Chemie und Elektrochemie in Berlin-Dahlem[1]).]

Für den Strömungswiderstand, den eine Flüssigkeit oder ein Gas in einem Leitungsrohr findet, ist unterhalb der kritischen Geschwindigkeit die Zähigkeit oder innere Reibung maßgebend. Der Koeffizient η der inneren Reibung einer kompressibelen Flüssigkeit soll nach den üblichen Annahmen der Theorie unabhängig von der Dichte bezw. dem Druck sein. Diese Forderung wird erfahrungsgemäß nur innerhalb eines beschränkten Druckbereiches erfüllt. Bei sehr geringen Drucken unterhalb des Atmosphärendruckes scheint η erheblich abzunehmen, wie Kundt und Warburg[2]) zuerst bei Luft und Wasserstoff gezeigt haben. Die beiden Forscher glauben jedoch, daß die Abnahme der inneren Reibung nicht so bedeutend ist, wie es nach ihrer Messung erscheint, sondern daß vielmehr die äußere Reibung zwischen Gas und Rohrwand nicht mehr »unendlich groß« sei, d. h. daß bei diesen niedrigen Drucken ein Gleiten der Randschicht an der Rohrwand stattfinde.

Daß bei hohen Drucken die innere Reibung η zunimmt, haben zuerst Warburg und Babo[3]) und später P. Phillips[4]) an gasförmiger Kohlensäure in der Nähe des kritischen Punktes gefunden. Die gleichen Beobachtungen hat Ruckes[5]) bei Luft bis zu 15 at angestellt. Warburg und Babo finden für gasförmige Kohlensäure von der Dichte 0,1, dem 500fachen der normalen Dichte, ein Anwachsen von η um nur 9 vH, dagegen bei weiterem Steigen der Dichte auf 0,8 ein Anwachsen von η um 360 vH. Phillips, der ebenfalls Versuche mit Kohlensäure angestellt hat, findet ähnliche Ergebnisse.

Ruckes gibt für Luft Werte von η an zwischen 1 und 39 at, wobei die Werte von η oberhalb von 15 at keine wirkliche Bedeutung mehr haben, da dort, wie ohne weiteres aus seinen Kurven ersichtlich und von ihm auch selbst angegeben, das Gebiet der laminaren Strömung überschritten ist. Bei einer Drucksteigerung von 1 bis 15 at wächst η um 20 vH.

Eine Gesetzmäßigkeit für die Abhängigkeit des Reibungskoeffizienten vom Druck ist auf Grund dieser hier angeführten Versuchsergebnisse noch nicht aufgestellt worden, einmal weil das vorliegende Material noch zu spärlich ist, dann aber, weil eine theoretische Erklärung dieser Abhängigkeit zwar vorhanden ist, jedoch bisher noch keinen analytischen Ausdruck gefunden hat.

Die theoretische Forderung, nach der η unabhängig vom Druck sein soll, beruht auf der Voraussetzung eines idealen Gases, die für sehr hohe Drucke nicht mehr zulässig ist. Einmal wird hier der von den Molekülen erfüllte Raum im Verhältnis zu dem gesamten von dem Gase erfüllten Raum so groß, daß er diesem gegenüber nicht mehr

---

[1]) Auszug aus einer von der Technischen Hochschule Karlsruhe genehmigten Dr.-Ing.-Dissertation des Verfassers.

[2]) Warburg und Kundt, Ann. d. Physik 1875, 155, S. 357.

[3]) Warburg und v. Babo, Ann. d. Physik 1882, 17, S. 390.

[4]) Phillips, Proc. of the Roy. Soc. 1912, 87, S. 48.

[5]) Ruckes, Ann. d. Phys. 1908, 25, S. 983.

vernachlässigt werden darf. Zweitens verringert sich der Abstand der Moleküle so weit, daß eine teilweise Ueberdeckung der Wirkungssphären eintritt. Diese beiden Umstände beeinflussen die Größe der mittleren Weglänge l und damit den Koeffizienten η. (Vergl. die a- und b-Korrektur in der van der Waalsschen Zustandsgleichung.) Hr. Prof. Einstein hat die Güte gehabt, eine Näherungsrechnung zur Bestimmung dieser Einflüsse durchzuführen mit dem Ergebnis (Privatmitteilung), daß beide Korrekturen denselben Bau aufweisen, aber mit entgegengesetzten Vorzeichen behaftet sind. Die Korrektur infolge des Molekularvolumens läßt l und η mit steigendem Druck kleiner werden; die Korrektur infolge der Ueberdeckung der Wirkungssphären dagegen größer. Nach seiner Schätzung überwiegt im Einklang mit den Versuchsbeobachtungen der letztere Einfluß. Hr. Einstein bemerkt, daß seine Rechnung den Charakter einer Näherung trägt und deshalb keinen Anspruch auf unbedingte Zuverlässigkeit machen kann.

Die Untersuchung des Strömungswiderstandes hochverdichteter Gase in Rohrleitungen erstreckt sich demnach in ihrem ersten Teile auf die experimentelle Prüfung der Aenderung der inneren Reibung mit zunehmender Gasdichte. Die Abhängigkeit kann ermittelt werden, indem man das zu untersuchende Gas bei verschiedenen Dichten mit Geschwindigkeiten, die unterhalb der kritischen Geschwindigkeit liegen, durch ein Rohr strömen läßt und die Werte für η aus dem Poiseuilleschen Gesetz ermittelt.

Der zweite Teil der Untersuchung befaßt sich mit dem Strömungswiderstand oberhalb der kritischen Geschwindigkeit, wo der Widerstand bekanntlich nicht mehr allein von der inneren Reibung abhängt. Solange das Turbulenzproblem, das zurzeit durch die Arbeiten von Prandtl, Schiller u. a. wieder in den Vordergrund des Interesses gerückt ist, nicht zum Abschluß gekommen ist, bietet der von Reynolds zuerst angegebene und von Blasius[1]) weiter ausgebaute Aehnlichkeitsansatz die geeignete Unterlage für die Untersuchung der turbulenten Strömung. Setzt man den Druckverlust in einer Rohrleitung

$$\Delta p = \lambda \frac{l}{d} \gamma \frac{w^2}{2g},$$

wobei l die Rohrlänge, d die lichte Rohrweite, γ das spez. Gewicht der strömenden Flüssigkeit, w die Geschwindigkeit und g die Erdbeschleunigung bedeuten, so ist der Faktor λ eine Funktion der »reduzierten Geschwindigkeit«, d. i. des Quotienten von wd durch die Zähigkeitszahl $\nu = \frac{g\eta}{\gamma}$. Für Wasser findet Blasius

$$\lambda = 0{,}3164 \sqrt[4]{\frac{\nu}{wd}}.$$

Ombeck[2]), der Versuche mit Luft bis zu einem Druck von 6 at angestellt hat, findet

$$\lambda = 0{,}242 \sqrt[4{,}47]{\frac{\nu}{wd}}.$$

Die Versuche, über die im folgenden berichtet wird, hatten sich demgemäß auf folgende beide Punkte zu erstrecken:

1. In welchem Maße wächst η in dem zu untersuchenden Bereich mit dem Druck bezw. der Dichte des Gases?

2. Hat der Blasiussche Ansatz auch bei hohen Drucken Gültigkeit?

Die Versuche wurden mit Luft bei Drucken zwischen 1 kg/cm² und 200 kg/cm² ausgeführt.

1. Versuchsanordnung. Die Versuchsanordnung mußte so beschaffen sein, daß sie sowohl Messungen innerhalb des Bereiches der laminaren, als auch der turbulenten Strömung gestattete. Es wurden Glaskapillaren von 0,28 mm bis 0,65 mm l. W. und von rd. 150 cm Länge gewählt. Diese Rohre wurden gleichzeitig auch für die Prüfung der zweiten Frage, der Gültigkeit des Blasiusschen Ansatzes benutzt. Für diesen Fall waren die Dimensionen der Versuchsrohre durch die zur Verfügung stehenden Druckluftmengen beschränkt. Der Einfluß der Rauheit der Rohrwand konnte bei den glatten Glaskapillaren nicht ermittelt werden, es erwies sich aber das Bedenken, daß sich bei Kapillaren nie eine so ausgeprägte Turbulenz einstellt wie bei Rohren mit größerem Durchmesser, wenigstens für Kapillaren von mehr als 0,5 mm l. W., wie aus den späteren Versuchen hervorgeht, als unbegründet.

---

[1]) Blasius, Forschungsarbeiten, herausgegeben vom Ver. deutsch. Ing., Heft 131.

[2]) Ombeck, Dr.-Ing.-Dissertation Darmstadt 1913.

Abb. 1 zeigt die Versuchsanordnung. Aus der Druckflasche A strömt die Luft durch ein Reduzierventil R_a, wo es auf den gewünschten Anfangsdruck gedrosselt wird, durch eine in einem Wasserbade B befindliche Kupferspirale, um sich dort wieder auf Zimmertemperatur zu erwärmen; dann tritt sie durch die Muffe M_a in die Kapillare K, weiter in die Muffe M_e und durch das zweite Reduzierventil R_e, wo sie entspannt wird, in das in einem zweiten Wasserbade liegende schlangenförmige Rohr O, von dort durch einen Dreiweghahn H in eine pneumatische Wanne P bei kleinen Luftmengen, oder in eine Gasuhr G bei großen Mengen. Unmittelbar vor und hinter der Kapillare sind in den Muffen M_a und M_e einerseits 2 Stahlrohrmanometer angeschlossen, anderseits führen zwei Anschlüsse nach dem Differentialmanometer D, dessen nähere Beschreibung weiter unten gegeben wird. Der Druckabfall im Versuchsrohr wurde für Differenzen bis 2 at im Differentialmanometer, für größere in den beiden Stahlrohrmanometern gemessen, die Luftmenge in der pneumatischen Wanne, bezw. der Gasuhr. Es wurde so jeweils $\Delta p = f(w)$ bestimmt, während die anderen Variablen l, d, γ konstant gehalten wurden.

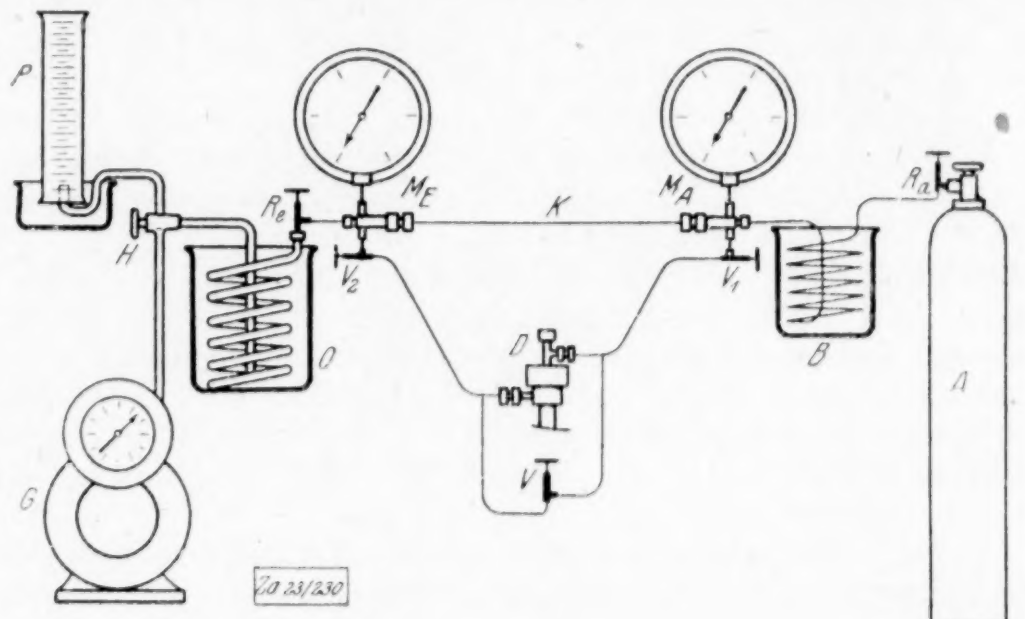


Abb. 1

Um den Druckabfall Δp im Bereich der laminaren Strömung messen zu können, war eine Vorrichtung nötig, die es gestattete, Druckdifferenzen von nur wenigen Millimetern Hg zwischen zwei Drucken bis zu 200 at zu messen. Es kam zu diesem Zweck ein zweischenkliges Quecksilbermanometer in der aus Abb. 2 ersichtlichen Anordnung zur Verwendung. In ein nahtloses Stahlrohr von 18 mm l. W. und 2 m Länge war ein Glasrohr von 6 mm l. W. und 1 mm Wandstärke eingezogen. Der Druck vor dem Versuchsrohr lag in dem Glasrohr, der Druck hinter dem Versuchsrohr im Ringraum zwischen Stahlrohr und Glasrohr. In der Achse des Glasrohres war ein dünner Widerstandsdraht auf der ganzen Länge gespannt, der am oberen Ende elektrisch isoliert herausgeführt wurde und unten mehr oder weniger, je nach dem augenblicklichen Stande des Quecksilbers in dasselbe eintauchte. Widerstandsdraht, Quecksilber, Stahlrohr wurden in eine Wheatstonesche Brücke geschaltet. Der Widerstand des Quecksilbers und des Stahlrohres war so klein, daß er gegenüber dem Widerstande des Drahtes vernachlässigt werden konnte. Die in der Brücke gemessene Widerstandsänderung war deshalb unmittelbar ein Maß für die Höhe des Quecksilbers in dem Glasrohr. Als Widerstands-

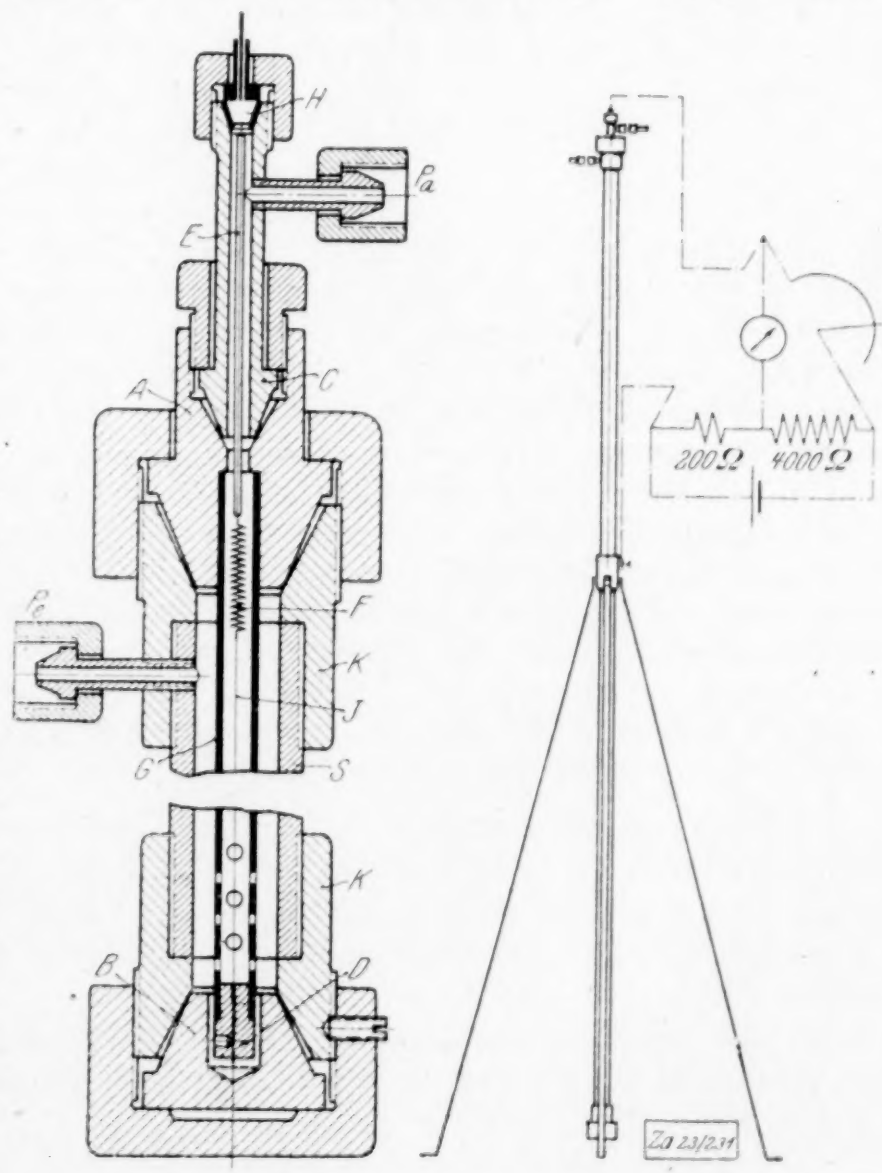


Abb. 2

draht diente ein Platin-Iridiumdraht von 0,1 mm Stärke. Das Manometer wurde bei Niederdruck geeicht. Der Nullpunkt blieb bei hohem Druck unverändert. Die Eichung ergab für den gesamten Meßbereich bis 2 at, daß einem gemessenen Widerstand von 1 Ω eine Druckdifferenz von 4,1 mm Quecksilber entsprach. Da die Widerstandsmessung 0,1 Ω noch zu messen gestattete, betrug die kleinste meßbare Druckdifferenz 0,4 mm Quecksilber. Das Manometer hat während der gesamten Versuche einwandsfrei gearbeitet. Häufige Kontrolleichungen ergaben keine Veränderungen.

Druckdifferenzen, die größer waren als 2 kg/cm^2, wurden mit zwei Stahlrohrmanometern gemessen, die einen Meßbereich von 1 kg/cm^2 bis 250 kg/cm^2 hatten, und die vor und nach den Versuchen in der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt geeicht waren. Die Ablesegenauigkeit betrug 0,2 kg/cm^2.

Die Geschwindigkeit der Luft fand sich aus der mit der pneumatischen Wanne und der Gasuhr gemessenen Luftmenge. Der Meßbereich der ersteren reichte von 0,03 ccm/sek bis 25 ccm/sek, der relative Beobachtungsfehler betrug im Mittel 2 vH. Die Genauigkeit der Gasuhr war, da stets nur volle Umdrehungen gemessen wurden, zuverlässig; die relativen Beobachtungsfehler blieben unter 1 vH.

Die Kalibrierung der Glaskapillaren erfolgte durch Einziehen eines Quecksilberfadens, dessen Länge und Gewicht bestimmt wurde. Die sechs bei den Versuchen verwendeten Rohre waren nach dem Gesichtspunkt eines möglichst gleichmäßigen Innendurchmessers ausgewählt worden. Die Abweichungen im Durchmesser eines Rohres blieben unter 2 vH; die ermittelten Durchmesserwerte waren mit einem Fehler unter 0,5 vT behaftet.

Mit Rücksicht auf die starke Veränderlichkeit der inneren Reibung mit der Temperatur wurde auf die genaue Bestimmung der letzteren großer Wert gelegt. Die Lufttemperatur vor dem Eintritt in das Versuchsrohr wurde in dem vorgeschalteten Wasserbade konstant auf Zimmertemperatur gehalten. Ruckes hat bei seinen Versuchen durch ein in die Kapillare eingeführtes Thermoelement mit verschiebbarer Lötstelle den Temperaturverlauf längs des Rohres gemessen und gefunden, daß die Erwärmung der in der Kapillare abgekühlten Luft nach Austritt aus der Mündung sofort sehr stark einsetzt und schon in sehr kleinem Abstand von ihr einen großen Wert annimmt. Um die Temperatur der Luft am Austrittsquerschnitt des Versuchsrohres zu bestimmen, mußte die Messung deshalb am zweckmäßigsten durch ein Thermoelement erfolgen, dessen Lötstelle unmittelbar an dem Ende der Kapillare anlag. Diese Anordnung stieß bei der oben geschilderten Ausgestaltung der Apparatur auf experimentelle Schwierigkeiten. Die Stahlmuffe H_e, in die die Kapillare mündete, gestattete keine einwandsfreien Messungen mit dem Thermoelement, da die Wärmeableitungen durch die großen Metallmassen störten. Deshalb wurde für zwei gesonderte Versuchsreihen die Stahlmuffe durch eine Glasmuffe ersetzt und die Temperatur bei Auströmen der Luft in die Atmosphäre bestimmt. Diese Versuche ergaben, daß eine nennenswerte Temperaturabnahme erst dann eintrat, wenn die Austrittsgeschwindigkeit in die Nähe der Schallgeschwindigkeit rückte. Die Abnahme betrug bei beiden Versuchen bei einer Geschwindigkeit von 310 m/sek 1° C und stieg auf 30° C bei Schallgeschwindigkeit. Die bei den Hauptversuchen auftretenden Geschwindigkeiten blieben weit unter der Schallgeschwindigkeit, die Temperatursenkung konnte deshalb vernachlässigt werden. Eine einfache thermodynamische Überlegung zeigte, daß die bei den Sonderversuchen für Luft von geringem Druck gefundenen Ergebnisse sich auf die Hauptversuche mit hochgespannter Luft übertragen ließen, wenn man eine Korrektur für die Aenderung des Wärmeübergangs von der Zimmerluft an die Kapillare und von dort an die durchströmende Luft anbringt, die sich aus der Nußeltschen Wärmeübergangsformel berechnen läßt.

2. Versuchsgruppen. Die Versuche wurden in folgende Gruppen eingeteilt, innerhalb deren der Rohrdurchmesser d und die Rohrlänge l unverändert blieben:

Gruppe	A	B	C	D	E	F	G	
$d =$	0,02860	0,02860	0,04320	0,04458	0,04759	0,05665	0,06220	cm
$l =$	136,9	126,9	142,7	152,0	155,0	148,0	154,0	»

Die Gruppen zerfallen ihrerseits in Versuchsreihen (römische Ziffern), in denen der Enddruck hinter der Kapillare konstant gehalten wurde. Aus jeder Versuchsreihe wurden ermittelt:

1. Die Größe des Reibungskoeffizienten η,
2. der Eintritt des Reynoldsschen Kriteriums und die Größe der Konstanten K,
3. die Gültigkeit des Blasiusschen Ansatzes für das Gebiet der Turbulenz.

Nur in den Gruppen A und C wurde die Prüfung des Blasiusschen Ansatzes nicht durchgeführt; ebenso nicht in Gruppe G, Reihe I, da hier während des Versuches die Kapillare zerbrach.

Zu Beginn einer jeden Versuchsreihe wurde die gesamte Apparatur bei geschlossenem Ventil R_e unter Druck gestellt und auf Dichtheit geprüft. Danach wurden die Ventile R_e und R_a geöffnet und so einreguliert, daß einerseits die pneumatische Wanne gerade die kleinste noch meßbare Durchgangsmenge anzeigte, andrerseits der Druck am Ende der Kapillare und der Druckabfall in der Kapillare konstant blieben. Die Durchgangsmenge wurde mit der Stoppuhr gemessen. Der Beharrungszustand stellte sich stets sehr bald ein, bei laminarer Strömung fast sofort, bei turbulenter Strömung nach wenigen Minuten.

3. Versuchsergebnisse. Die Versuchsergebnisse der Gruppen B und F sind in den nachfolgenden Tafeln ausführlich wiedergegeben. Es wurden gemessen:

1. p_a der Druck am Anfang der Kapillare.
2. p_e der Druck am Ende der Kapillare.
3. Ω der Widerstand des Differentialmanometers.
4. Ω_0 der Widerstand des Differentialmanometers für die Nullage.
5. V das durchströmende Luftvolumen im entspannten Zustand.
6. t die Zeit, während der V durchströmte.
7. ϑ_B die Temperatur im Wasserbade B.
8. ϑ_O die Temperatur im Wasserbade O.

Hieraus wurden berechnet:

1. Die Widerstandsänderung $\Delta\Omega = \Omega - \Omega_0$.
2. Die Druckdifferenz $\Delta p = p_a - p_e$, bezw. $= 0{,}0562\ \Delta\Omega$.
3. Der mittlere Druck der Luft im Rohre p_m.

Aus der Poiseuilleschen Gleichung und dem Aehnlichkeitsansatz folgen, daß sowohl für die laminare wie für die turbulente Strömung der Druckabfall im Versuchsrohr eine Parabel darstellt, deren Scheitelpunkt bei einem Enddruck $p_e = 1$ at liegt. Daß tatsächlich dies der Fall ist, wurde u. a. von Ombeck durch Versuche bestätigt. Je größer p_e wird, um so mehr entfernt man sich von dem Scheitelpunkt, und mit um so größerer Genauigkeit kann der Parabelast durch eine Gerade ersetzt werden. Es wurde berechnet, daß z. B. bei $p_e = 40$ at und $\Delta p = 50$ at der Fehler, der dadurch entsteht, daß man den Druckabfall als geradlinig annimmt, 5 vH beträgt, bei $p_e = 200$ at und $\Delta p = 80$ at dagegen nur noch 0,9 vH. Es wurde deshalb in allen den Fällen, wo dieser Fehler unterhalb der zulässigen Grenze blieb, p_m als arithmetisches Mittel aus p_a und p_e berechnet, sonst wurde er unter Annahme eines parabolischen Verlaufes ermittelt.

4. Die Luftgeschwindigkeit w_e im Endquerschnitt des Rohres aus der Gleichung

$$w_e = \frac{V}{t}\,\frac{1{,}033}{p_e}\,\frac{c}{F}\,10^{-2}\ \text{m/sek.}$$

In dieser Gleichung bedeuten: c den Korrekturfaktor, der sich aus der Abweichung der Gase vom idealen Zustand ergibt ($pv = cRT$). Er wurde aus den Versuchsergebnissen von Amagat entnommen; F der Rohrquerschnitt.

5. Die mittlere Luftgeschwindigkeit im Rohre

$$w_m = \frac{p_e}{p_w}\,w_e.$$

6. Der Anteil $\Delta p'$ des gemessenen Druckgefälles Δp, das lediglich zur Ueberwindung des Reibungswiderstandes dient. Er wurde aus der Gleichung

$$\Delta p' = \Delta p - \frac{w_m\, w_e\, \Delta p\, p_m}{c\,R\,T\,g\,p_a}$$

bestimmt. Der zweite Ausdruck der rechten Seite ist der Betrag von Δp, der zur Beschleunigung der Luftmengen im Rohre aufgewandt wird. Wie aus den Versuchsergebnissen ersichtlich, kann er in den meisten Fällen vernachlässigt werden, nur bei großen Geschwindigkeitszunahmen im Rohre tritt er in Erscheinung.

Auszug aus den Versuchsergebnissen.

p_E kg/cm²	Ω	$\Delta\Omega$ / p_A kg/cm²	Δp kg/cm²	$\Delta p'$ kg/cm²	p_m kg/cm²	V ccm	t sek	W_E m/sek	W_m m/sek
Gruppe B. $d = 0{,}0286$ cm, $l = 126{,}9$ cm.									
Nr. I. $\Omega_0 = 154{,}2$, $\vartheta_B = 19{,}2^0$ C, $\vartheta_0 = 19{,}3^0$ C.									
40,7	162,6	6,4	0,0360	0,0360	40,7	97	121,8	0,311	0,311
39,8	178,6	24,4	0,1370	0,1370	39,8	197	55,8	1,40	1,40
40,0	189,3	35,1	0,1970	0,1970	40,1	497	102,0	1,93	1,93
40,0	204,6	50,4	0,2830	0,2830	40,2	495	76,8	2,55	2,54
40,0	285,6	131,4	0,7380	0,7380	40,3		52,6	3,72	3,69
40,0	363,0	208,8	1,167	1,167	40,6		41,0	4,78	4,71
39,4	477,0	322,8	1,812	1,812	40,3	3045	198,0	6,17	6,03
40,0		43,3	3,3	3,3	41,6		158,2	7,61	7,32
40,2		45,0	4,8	4,8	42,6		126,2	9,49	8,96
41,0		49,3	8,3	8,3	45,1		88,8	13,2	12.0
40,5		56,8	16,3	16,3	50,3		57,1	20,7	16,7
40,5		60,0	19,5	19,5	51,1		49,8	23,9	18,9
39,8		62,9	23,1	23,1	52,3		45,0	26,9	20,5
40,4		65,5	25,1	25,1	53,9		42,2	28,3	21,2
40,0		76,6	36,6	36,3	59,9		32,6	36,9	24,0
39,7		85,6	45,9	45,4	64,9		27,4	44,3	27,1
40,8		107,8	67,0	66,0	78,8	6090	39,4	59,9	31,1
39,7		129,0	89,3	87,6	92,2		29,8	81,5	36,5
40,0		141,8	101,8	99,6	100,2		25,8	93,8	38,2
40,0		183,8	143,8	139,7	127,2	9135	26,0	139,0	43,6
40,0		204,2	164,2	159,0	140,5		22,6	160,5	45,7
Nr. II. $\Omega_0 = 154{,}0$, $\vartheta_B = 19{,}0^0$ C, $\vartheta_0 = 19{,}1^0$ C.									
80,7	157,9	3,9	0,0219	0,0219	80,7	98	84,5	0,225	0,225
80,8	165,2	11,2	0,0629	0,0629	80,8	196	81,5	0,468	0,468
80,7	174,0	20,0	0,1124	0,1124	80,7	496	111,6	0,864	0,864
79,9	189,7	35,7	0,2006	0,2006	80,0		68,0	1,43	1,43
80,5	221,5	67,5	0,2791	0,2791	80,6		58,4	1,66	1,66
79,9	287,0	133,0	0,7470	0,7470	80,2		37,6	2,60	2,59
79,8	351,9	197,9	1,111	1,111	80,3	3045	186,6	3,21	3,20
80,9	520,0	366,0	2,057	2,057	81,9		128,8	4,59	4,53
79,8		84,0	4,2	4,2	81,9		93,5	6,40	6,24
80,8		88,4	7,6	7,6	84,4		65,2	9,07	8,68
80,9		96,9	16,0	16,0	88,9		41,0	14,4	13,1
80,1		105,8	25,7	25,6	92,9		31,4	19,0	16,6
80,6		115,0	34,4	34,2	97,8	6090	52,4	22,7	18,7
80,4		126,2	45,8	45,5	103,3		43,8	27,5	21,4
80,4		136,6	56,2	55,8	108,9		37,8	31,6	23,3
81,0		150,8	69,8	69,2	119,0		32,2	37,8	25,8
80,9		165,2	84,3	83,5	127,5	9135	39,8	44,4	28,2
79,8		197,5	117,7	116,2	147,0		30,4	59,0	33,0
79,2		219,5	140,3	138,1	159,5		25,4	71,4	35,5
Nr. III. $\Omega_0 = 154{,}3$, $\vartheta_B = 19{,}1^0$ C, $\vartheta_0 = 19{,}2^0$ C.									
119,8	160,0	5,7	0,0320	0,0320	119,8	196	87,8	0,296	0,296
120,9	167,0	12.7	0,0714	0,0714	120,9	198	49,6	0,526	0,526
120,2	172,1	17,8	0,1000	0,1000	120,2	500	88,6	0,746	0,746
119,5	225,9	71,6	0,4020	0,4020	119,7	3045	283,8	1,43	1,42
120,5	295,6	141,3	0,7930	0,7930	120,9		201,8	1,99	1,98
120,0	395,3	241,0	1,354	1,354	120,6		145,0	2,78	2,76
121,0		124,7	3,7	3,7	122,8		88,8	4,50	4,43
120,6		127,2	6,6	6,6	123,9		63,5	6,32	6,16
120,3		131,0	10,7	10,7	125,6		49,0	8,21	7,86
120,6		134,5	13,9	13,9	127,5		41,4	9,70	9,17

p_E kg/cm²	Ω	$\Delta\Omega$ / p_A kg/cm²	Δp kg/cm²	$\Delta p'$ kg/cm²	p_m kg/cm²	V ccm	t sek	W_F m/sek	W_m m/sek
				Noch: Nr. III.					
120,0		139,8	19,8	19,8	129,9		34,5	11,7	10,8
120,6		148,0	27,4	27,4	134,3	6090	56,0	14,3	12,9
120,0		157,5	37,5	37,4	138,7		47,4	17,0	14,7
120,3		171,1	50,8	50,6	145.7		39,4	20,4	16,9
120,0		178,6	58,6	58,3	149,3		33,8	23,9	19,2
120,0		192,4	72,4	72,0	160,9		29,0	27,8	20,7
119,7		199,9	80,2	79,7	164,4	9135	40,4	30,1	21,9
120,2		210,2	90,0	89,3	170,1		37,4	32,4	22,8
				Nr. IV.					
				$\Omega_0 = 154{,}4$, $\vartheta_B = 18{,}9^0$ C, $\vartheta_0 = 19{,}0^0$ C.					
160,2	160,3	5,9	0,0320	0,0320	160,2	198	102,5	0,197	0,197
160,0	163,9	9,5	0,0534	0,0534	160,0	300	78,8	0,389	0,389
159,8	169,0	14,6	0,0819	0,0819	159,8	495	94,4	0,537	0,537
160,0	169,5	15,1	0,0848	0,0848	160,0		92,0	0,550	0,550
160,4	208,0	53,6	0,3010	0,3010	160,5	500	48,4	1,05	1,05
160,4	298,0	143,6	0,8060	0,8060	160,8	3045	176,0	1,77	1,76
161,0	419,9	255,5	1,435	1,435	161,7		124,6	2,49	2,48
159,5		162,7	3,2	3,2	161,1		89,4	3,50	3,46
160,6		165,9	5,3	5,3	163,2		67,0	4,63	4,56
160,4		168,0	7,6	7,6	164,2		54,0	5,76	5,63
160,4		172,9	12,5	12,5	166,6		39,2	7,93	7,63
160,5		179,6	19,1	19,1	170,0	6090	63,5	9,78	9,24
160,0		190,8	30,8	30,8	175,4		48,5	12,8	11,7
161,0		197,7	36,7	36,7	179,3		42,6	14,5	13,1
160,0		202,3	42,3	42,2	181,1		39,0	16,0	14,1
				Nr. V.					
				$\Omega_0 = 154{,}3$, $\vartheta_B = 18{,}8^0$ C, $\vartheta_0 = 18{,}9^0$ C.					
199,6	159,7	5,4	0,0303		199,6	196	85,0	0,201	0,201
200,3	164,9	10,6	0,0596		200,3	300	68,2	0,384	0,384
199,9	180,4	26,1	0,1410		199,9	498	60,0	0,724	0,724
199,5	270,0	115,7	0,6500	$\Delta p' = \Delta p$	199,8	3045	157,5	1,68	1,68
199,1	470,0	315,7	1,773		199,9		87,6	3,04	3,03
200,4		204,5	4,1		202,5		68,0	3,91	3,87
200,6		209,3	8,7		204,9		44,0	6,04	5,92
200,5		221,1	20,6		210,8	6090	55,2	9,64	9,18
198,5		229,1	30,6		213,8		44,0	12,1	11,3
				Gruppe F. $d = 0{,}05665$ cm, $l = 148{,}0$ cm.					
				Nr. I.					
				$\Omega_0 = 152{,}4$, $\vartheta_B = 16{,}7^0$ C, $\vartheta_0 = 16{,}6^0$ C.					
40,6	153,6	1,2	0,0074	0,0074	40,6	195	78,6	0,247	0,247
40,0	155,1	2,7	0,0165	0,0165	40,0	398	53,0	0,757	0,757
39,5	157,0	4,6	0,0278	0,0278	39,5	495	40,6	1,25	1,245
40,1	162,8	10,4	0,0617	0,0617	40,1	496	29,0	1,72	1,72
40,5	172,0	19,6	0,1140	0,1140	40,5	3045	136,4	2,23	2,23
40,0	179,4	27,0	0,1556	0,1556	40,0		115,4	2,66	2,66
39,9	188,0	35,6	0,2050	0,2050	40,0		98,4	3,13	3,13
40,2	198,7	46,3	0,2660	0,2660	40,3		85,6	3,57	3,57
40,4	211,3	58,9	0,3380	0,3380	40,5		73,4	4,14	4,14
40,0	221,5	69,1	0,3960	0,3960	40,2		68,0	4,51	4,49
40,0	230,6	78,2	0,4490	0,4490	40,2		62,8	4,88	4,86
39,8	246,5	94,1	0,5380	0,5380	40,0		57,2	5,38	5,36
39,8	262,0	109,6	0,6260	0,6260	40,1		52,8	5,84	5,79
39,7	278,0	125,6	0,7180	0,7180	40,0		48,0	6,35	6,30
39,9	310,2	157,8	0,9020	0,9020	40,3		42,4	7,26	7,19

p_E kg/cm²	Ω	$\Delta\Omega$ / p_A kg/cm²	Δp kg/cm²	$\Delta p'$ kg/cm²	p_m kg/cm²	V ccm	t sek	W_E m/sek	W_m m/sek
				Noch: Nr. I.					
40,0	340,9	188,5	1,076	1,076	40,5		38,0	8,07	7,97
39,8	363,9	211,5	1,208	1,208	40,4		35,6	8,66	8,53
40,0	401,9	249,5	1,425	1,425	40,7		32,2	9,53	9,37
40,0	430,6	278,2	1,590	1,590	40,8		30,6	10,0	9,83
40,0	476,5	324,1	1,852	1,852	40,9		28,2	10,9	10,6
40,2		42,6	2,4	2,4	41,4	6090	49,4	12,4	12,0
39,4		43,7	4,3	4,3	41,6		36,6	17,0	16,1
39,8		45,6	5,8	5,8	42,7		30,4	20,3	18,9
40,3		48,2	7,9	7,9	44,2		24,8	24,6	22,4
39,6		50,4	10,8	10,8	45,0	9135	30,4	30,5	26,8
40,0		56,3	16,3	16,1	48,0		23,4	40,5	33,8
				Nr. II.					
				$\Omega_0 = 152{,}9$, $\vartheta_E = 16{,}7^0$ C, $\vartheta_0 = 16{,}6^0$ C.					
80,8	153,2	0,3	0,0018		80,8	194	112,0	0,086	0,086
80,0	154,8	1,9	0,0116		80,0	497	47,0	0,530	0,530
80,1	156,6	3,7	0,0225		80,1		31,2	0,796	0,796
80,5	163,4	10,5	0,0622		80,5	3045	131,4	1,15	1,15
79,7	183,9	31,0	0,1790		79,7		73,2	2,09	2,09
80,1	197,5	44,6	0,2560		80,2		59,0	2,58	2,58
79,9	215,2	62,3	0,3570		80,0		48,6	3,15	3,15
80,1	245,2	92,3	0,5270		80,3		38,8	3,93	3,93
79,9	269,3	116,4	0,6850		80,2		34,4	4,45	4,45
80,1	297,0	144,1	0,8220		80,5		30,4	5,01	4,98
80,5	320,6	167,7	0,9570		81,0		28,2	5,37	5,34
80,0	349,1	196,2	1,121		80,6		25,4	6,01	5,97
80,0	394,1	241,2	1,378		80,7	6090	45,2	6,74	6,68
80,2	437,0	284,1	1,625		81,0		41,4	7,35	7,28
79,8	458,9	306,9	1,748		80,6		40,0	7,64	7,57
79,8	490,9	338,0	1,930		80,7		37,8	8,08	8,00
80,6		83,6	3,0		82,1		29,8	10,2	9,92
80,5		85,1	4,6		82,8		23,8	12,7	12,5
79,9		86,4	6,5		83,8		19,0	16,1	15,4
79,9		88,8	8,9		84,3	9135	23,6	19,4	18,4
80,6		91,2	10,6		85,9		22,8	21,8	20,5
80,0		93,8	13,8		86,9		17,4	26,3	24,2
				Nr. III.					
				$\Omega_0 = 153{,}4$, $\vartheta_E = 16{,}8^0$ C, $\vartheta_0 = 16{,}9^0$ C.					
121,0	154,0	0,6	0,0037		121,0	296	102,8	0,0965	0,0965
119,5	155,1	1,7	0,0104		119,5	497	43,4	0,389	0,389
120,0	159,7	6,3	0,0379		120,0		22,6	0,744	0,744
119,8	162,7	9,3	0,0552		119,8	3045	116,8	0,884	0,884
120,0	171,0	17,6	0,1030		120,0		82,4	1,25	1,25
119,8	181,6	28,2	0,1704		119,8		60,8	1,70	1,70
120,2	196,2	42,8	0,2460		120,3		49,4	2,08	2,08
120,2	216,0	62,6	0,3590		120,4		39,4	2,62	2,62
120,0	234,5	81,1	0,4630		120,2		34,0	3,03	3,02
120,3	256,2	102,6	0,5860		120,6		30,0	3,43	3,41
120,2	278,5	125,1	0,7140		120,6		26,6	3,86	3,84
120,4	310,3	156,9	0,8960		120,8		23,8	4,31	4,29
119,7	348,0	194,6	1,112		120,2	6090	41,4	4,99	4,97
120,1	395,9	242,5	1,385		120,8		36,4	5,65	5,63
120,3	427,1	273,7	1,563		121,1		34,6	5,94	5,90
120,0	463,9	310,5	1,774		120,8		32,2	6,40	6,36
120,0	493,6	340,2	1,944		120,9		31,0	6,64	6,59
120,3		124,8	4,5		122,5	9135	29,4	10,5	10,3
120,4		127,1	6,7		123,7		22,4	13,7	13,4
120,0		129,2	9,2		124,6		18,8	16,4	15,8
120,0		132,2	12,2		126,1		15,8	19,5	18,6

$\Delta p' = \Delta p$

p_E kg/cm²	Ω	$\Delta\Omega$ / p_A kg/cm²	Δp kg/cm²	$\Delta p'$ kg/cm²	p_m kg/cm²	V ccm	t sek	W_E m/sek	W_m m/sek
				Nr. IV.					
				$\Omega_0 = 153{,}4$, $\vartheta_B = 16{,}5^0$ C, $\vartheta_0 = 16{,}6^0$ C.					
160,0	155,4	2,0	0,0123		160,0	496	40,6	0,319	0,319
160,3	155,8	2,4	0,0146		160,3		31,0	0,417	0,417
160,4	159,8	6,4	0.0384		160,4	3045	125,6	0,632	0,632
159,4	168,1	14,7	0,0860		159,4		78,6	1,02	1,02
160.0	180,0	26,6	0,1534		160,0		56,6	1,41	1,41
160,3	192,7	39,3	0,2210		160,4		44,4	1,79	1.79
159,0	205,0	51,6	0,2950		159,1		38,4	2,09	2,09
159,5	228,3	74,9	0,4290		159,7		31,0	2,57	2.57
159,7	256,5	103,1	0,5900	$\Delta p' = \Delta p$	160,0		26,0	3,07	3,07
159,5	285,7	132,3	0.7550		159,9		23,0	3,48	3.47
159,8	314,2	160,8	0,9180		160,3		20,2	3,95	3,94
160,0	337,2	183,8	1,050		160,5	6090	37,6	4,23	4.22
160,0	372,9	219,5	1,255		160,6		34,4	4,62	4,60
161,0	417,9	264,5	1,510		161,7		31,4	5,02	5,00
159,5	478,0	324,6	1,855		160,4		28,0	5,70	5,67
160,6		164,0	3,4		162,3		20,6	7,85	7,60
160,0		166,0	6,0		163,0	9135	23,0	13,8	10,2
160,0		168,5	8,5		164,3		18,8	14,7	12,4

4. Der Reibungskoeffizient η und das Reynoldssche Kriterium. In den Kurven Abb. 3 bis 9 sind die Funktionen $\Delta p' = f(w_m)$ der Versuchsgruppen *A* bis G in einem zur Ermittlung von η geeigneten Maßstabe aufgetragen. Die Versuchswerte liegen zunächst auf einer Geraden und bestätigen hiermit das Bestehen der Poiseuilleschen Strömung. Die kritische Geschwindigkeit und der Eintritt der Turbulenz liegen dort, wo der geradlinige Verlauf in einem scharfen Knick verlassen wird, und die Kurve einen steilen, gekrümmten Verlauf nimmt. Nach der Poiseuilleschen Gleichung ist

$$\eta = \left(\frac{d^2\,10}{32\,l}\right)\frac{\Delta p'}{w_m}.$$

Der Klammerausdruck ist innerhalb einer Gruppe eine Konstante, die Neigung $\Delta p : w_m$ der Geraden demnach ein Maß für die Größe von η.

Sämtliche so ermittelten Werte von η sind in Abb. 10 als Funktion von p eingetragen.

Die Unterschiede der aus den verschiedenen Gruppen für ein und denselben Druck ermittelten Werte von η rühren neben Beobachtungsfehlern, deren Größe auf rd. 2 vH geschätzt wird, von der wechselnden Beschaffenheit der benutzten Luft her. Trotzdem beim Füllen der Druckflaschen eine Trockenflasche zwischen den Kompressor und dieselben eingeschaltet worden war, war es doch nicht immer möglich gewesen, die Luft völlig trocken zu bekommen. Wie groß der Einfluß derartiger Beimischungen zu der Luft auf den Wert von η ist, zeigen die Angaben von 9 Beobachtern, die als Werte für η bei gleicher Temperatur sämtlich verschiedene Resultate erhalten, die zwischen $1{,}679 \cdot 10^{-7}$ und $1{,}878 \cdot 10^{-7}$ liegen.

Durch die Mittelwerte der einzelnen Angaben ist eine Kurve gelegt, die zunächst flach, dann ein wenig steiler verläuft. Hiernach nimmt η bei einer Drucksteigerung von 1 auf 100 at um 23 vH zu und bei einer Drucksteigerung auf 200 at um 91 vH. Die Werte von η bei Ruckes steigen stärker an als die hier gefundenen, er findet bei 10 at schon einen Zuwachs um rd. 6 vH. Seine Angaben rühren jedoch nur von einer einzigen Versuchsreihe her, können daher keinen Anspruch auf unbedingte Zuverlässigkeit machen,

Abb. 3

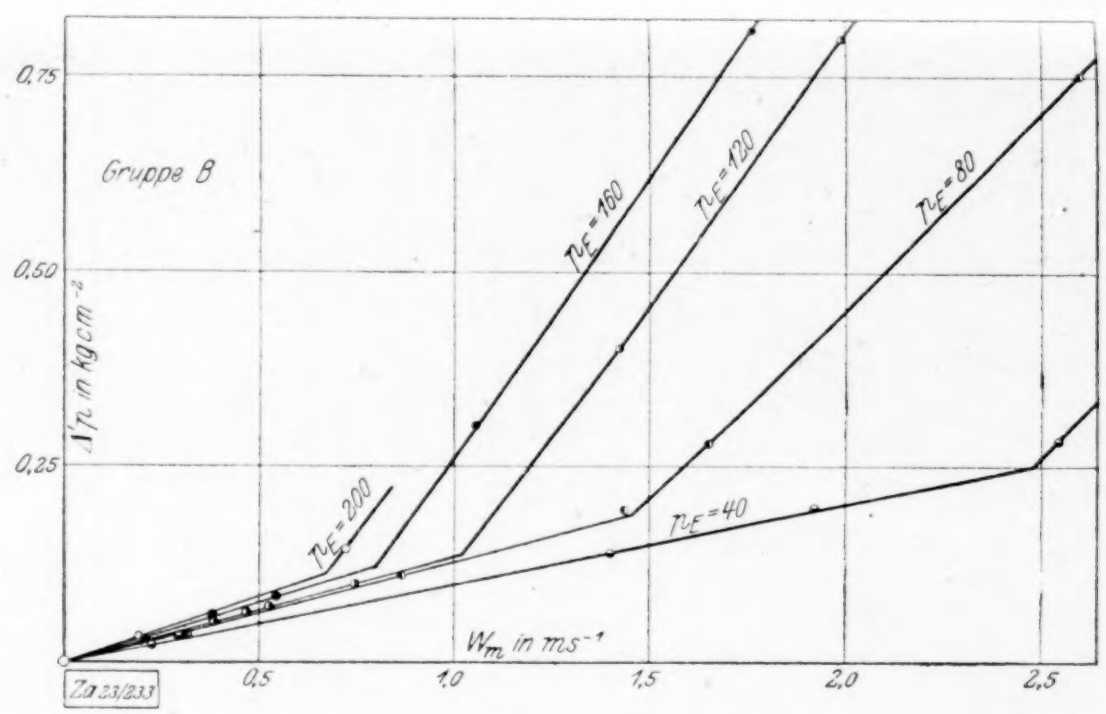


Abb. 4

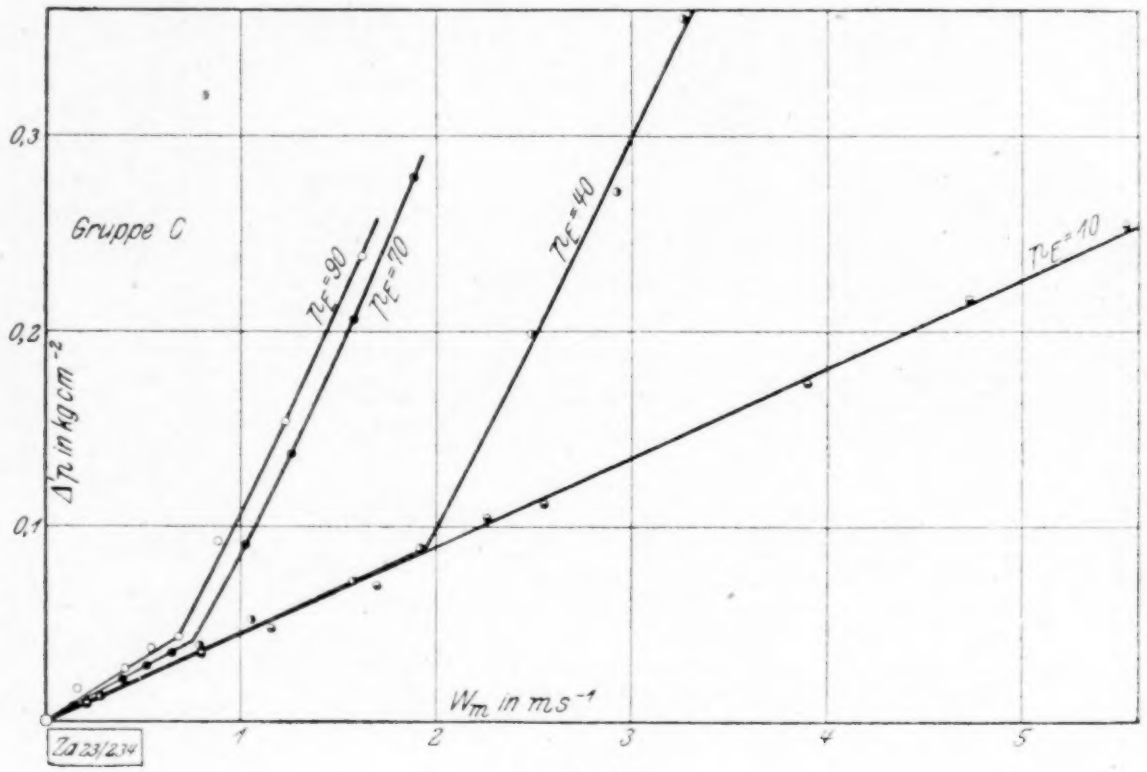


Abb. 5

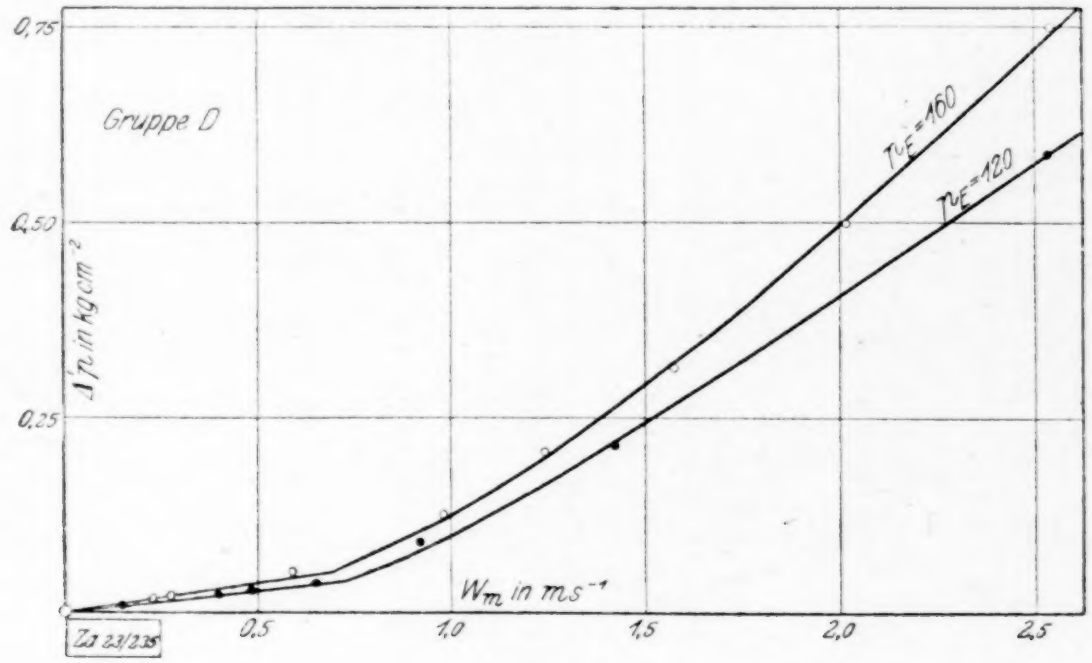


Abb. 6

außerdem erstreckt sich sein Meßbereich, in dem er Poiseuillesche Strömung hat, nur bis rd. 15 at. Für größere Drucke fehlt deshalb jede Vergleichsmöglichkeit. Die Reynoldssche Konstante K ist für die verschiedenen Versuchsgruppen nach Enddrucken geordnet in folgender Zahlentafel zusammengestellt. Sie ist bei normalem Druck rd. 2000 und nimmt mit zunehmendem Enddruck ein wenig ab.

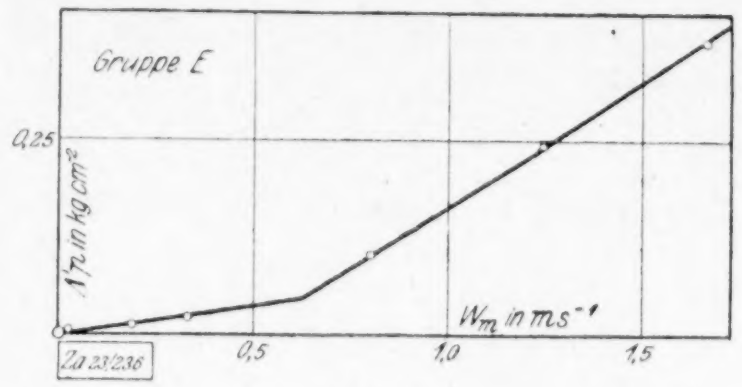


Abb. 7

Gruppe	Kritische Werte von K für $p_E =$						
	40	70	80	90	120	160	200
A	2300		2080		2250	2110	1736
B	1703		1587		1570	1415	1316
C	2190	1286		1222			
D					2010	2080	
E							1975
F	2500		2700		2420	1990	
G	2000				2000		1880
M	2139		2122		2050	1899	1727

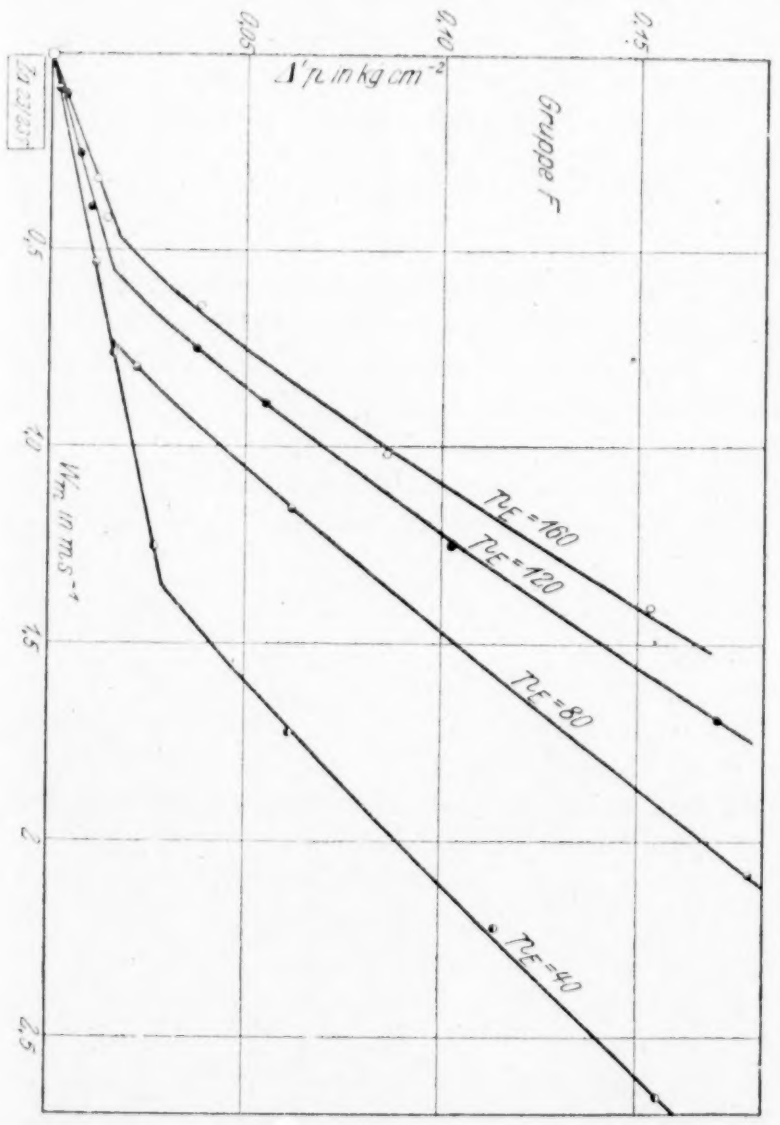


Abb. 8

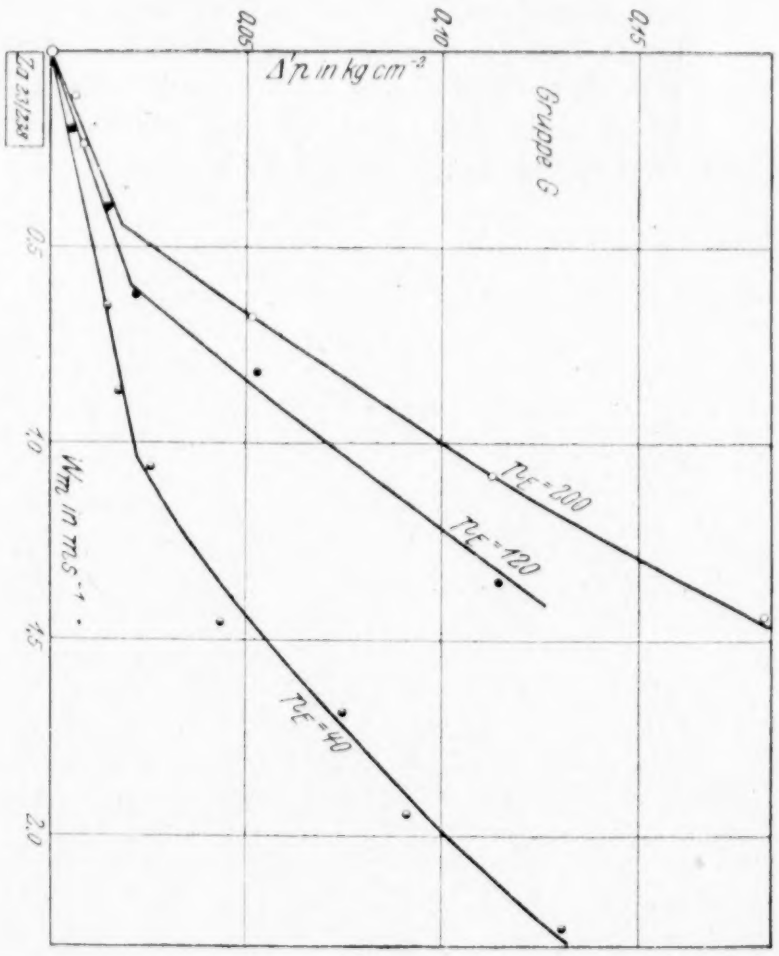


Abb. 9

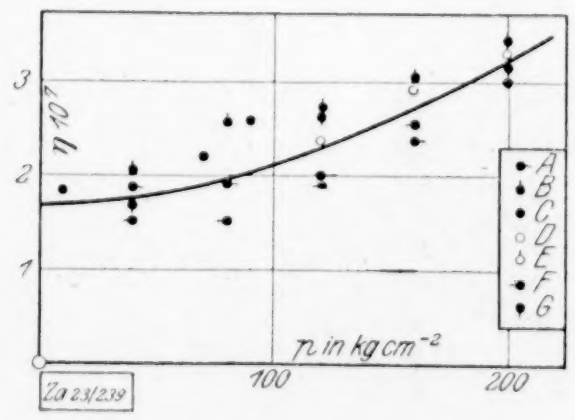


Abb. 10

5. Prüfung des Blasiusschen Ansatzes. Für das Gebiet der Turbulenz sind die Funktionen $\Delta p' = f(w')$ der Gruppen B, D, E, F, G in den Kurven, Abb. 11 bis 17 eingetragen.

Wenn die in den verschiedenen Gruppen und Versuchsreihen gefundenen Funktionen dem

Aehnlichkeitsgesetz genügen, dann müssen die aus sämtlichen Versuchen ausgerechneten Werte

$$\lambda = \frac{2\,g\,d}{\gamma\,l}\,\frac{\Delta p'}{w^2}$$

aufgetragen als Funktion der reduzierten Geschwindigkeit K

$$f\left(\frac{\gamma\,w\,d}{g\,\eta}\right) = f(K)$$

auf ein und derselben Kurve liegen. Diese muß, falls ein »Potenzgesetz« bestehen soll, der Beziehung

$$\lambda = m\,K^{-1/n}$$

Genüge leisten. Um diese Prüfung auszuführen, wurden aus sämtlichen Kurven der Abb. 11 bis 17 punktweise

$$\log\lambda = \log\left(\frac{2\,g\,d}{\gamma_m\,l}\,\frac{\Delta p'}{w_m{}^2}\right) \quad \text{und} \quad \log K = \log\left(\frac{\gamma_m\,w_m\,d}{g\,\eta}\right)$$

berechnet und γ_m für beide Gleichungen aus der Beziehung

$$\gamma_m = \frac{p_m}{c\,R\,T}$$

(c Korrekturfaktor s. o., R Gaskonstante, T abs. Temperatur) ermittelt.

Diese so berechneten Werte von $\log\lambda$ und $\log K$ wurden in ein Koordinatensystem aufgetragen (Abb. 18 und 19). Diese Kurven müssen, wenn sie dem Ausdruck

$$\lambda = m\,K^{-1/n}$$

genügen, einen linearen Verlauf haben. Aus ihrer Neigung gegen die Ordinatenachse kann $n = \mathrm{tg}\,\varphi$ entnommen werden, und ihr Abschnitt auf dieser Achse ist gleich $\log m$. Für das Gebiet der Poiseuilleschen Strömung hat λ als Funktion von K einen anderen Wert wie für das Gebiet der Turbulenz. Durch Einsetzen der Poiseuilleschen Gleichung folgt, daß hier

$$\lambda = \frac{64}{K}$$

ist. In dem logarithmischen Koordinatensystem ist dies eine Gerade unter der Neigung von 45°, die auf den Achsen Abschnitte von der Länge $\log 64 = 1{,}806$ abschneidet. Diese Gerade ist in die Kurvenblätter eingetragen.

Die Kurvenpunkte, die zunächst auf der Poiseuilleschen Geraden liegen, verlassen diese

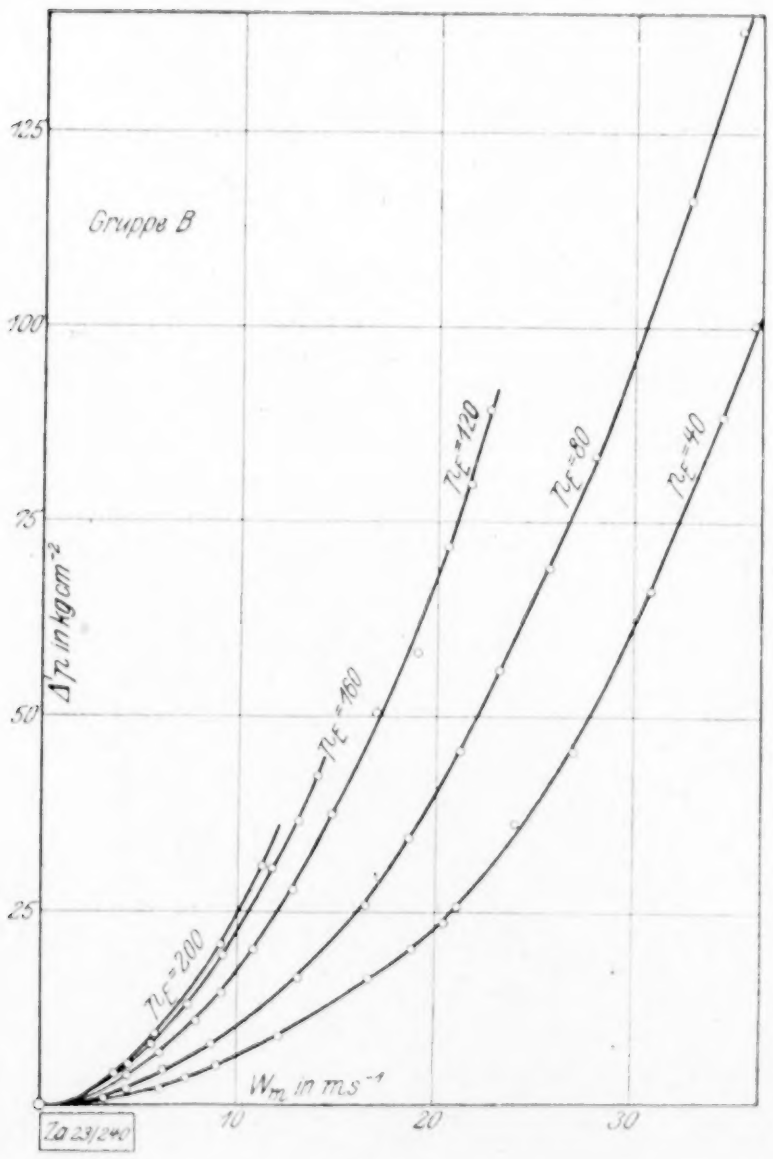


Abb. 11

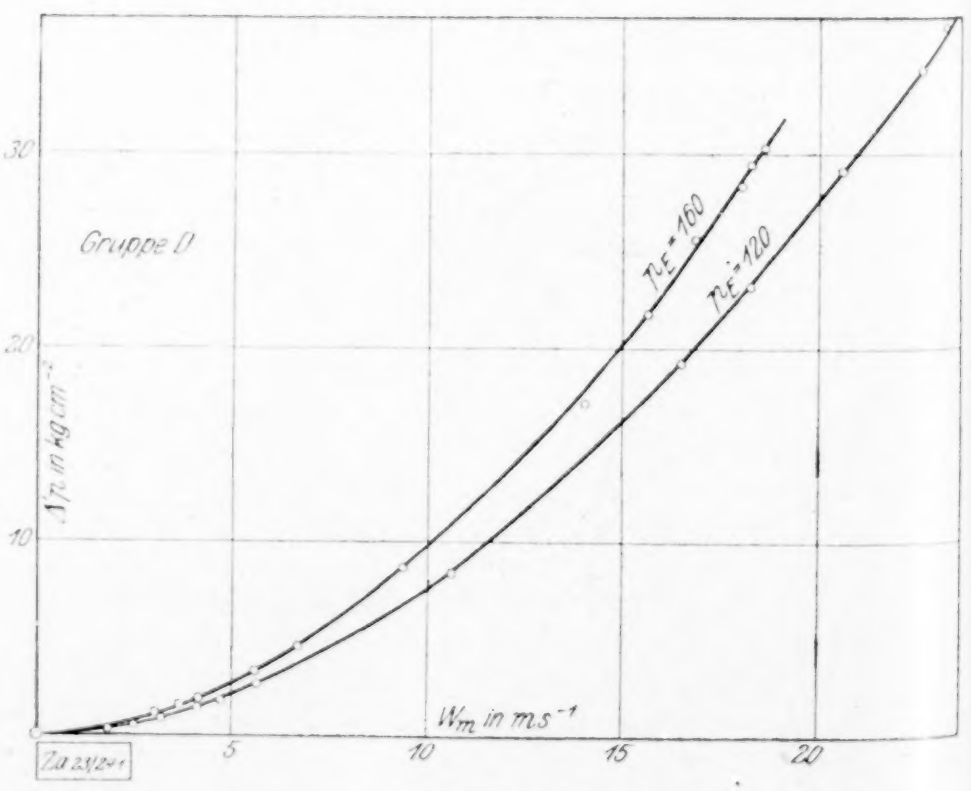


Abb. 12

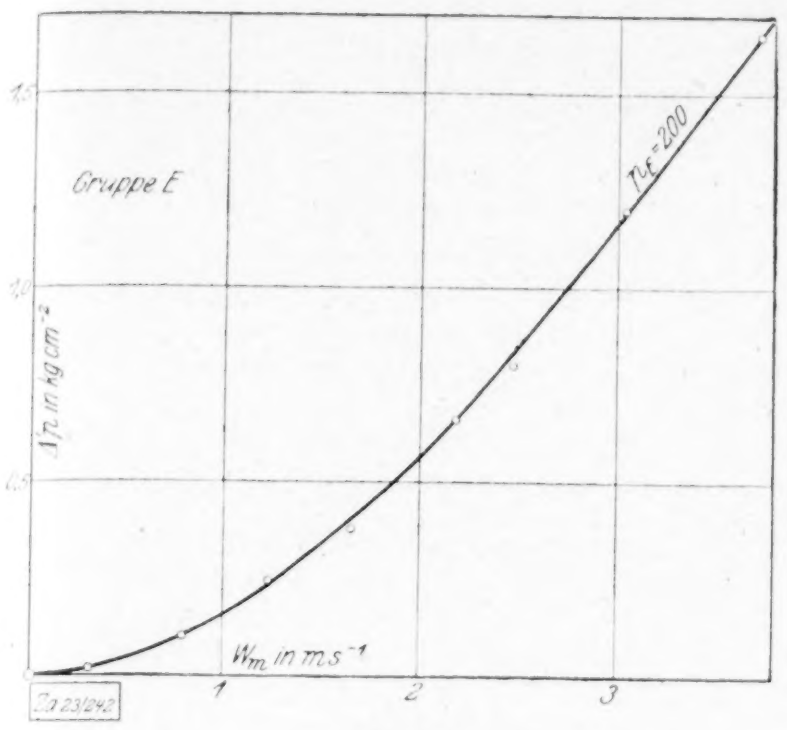


Abb. 13

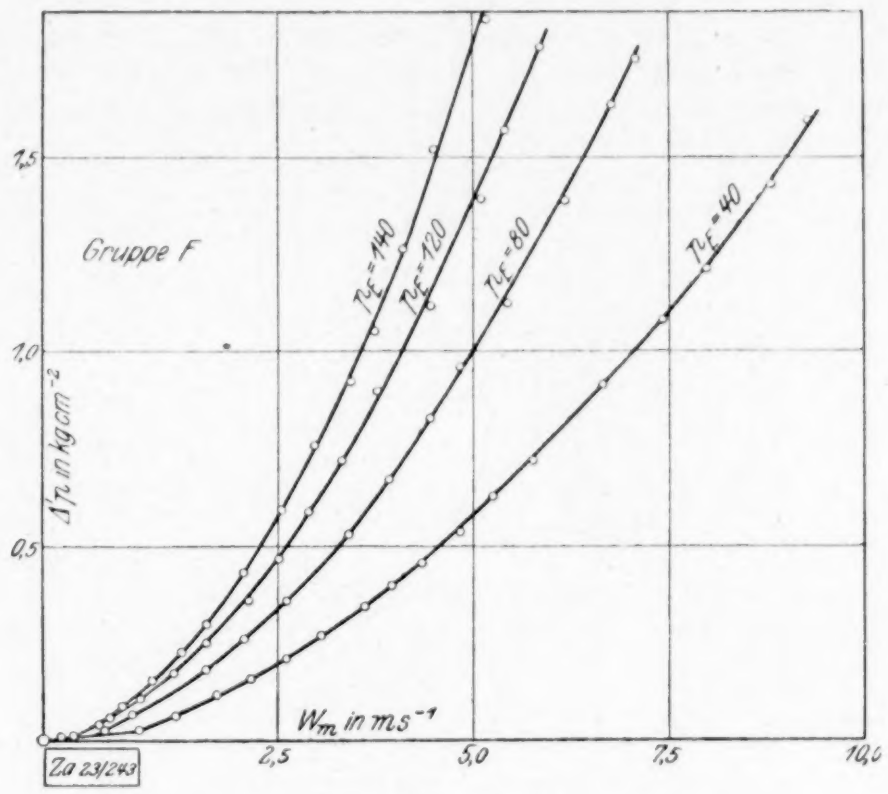


Abb. 14

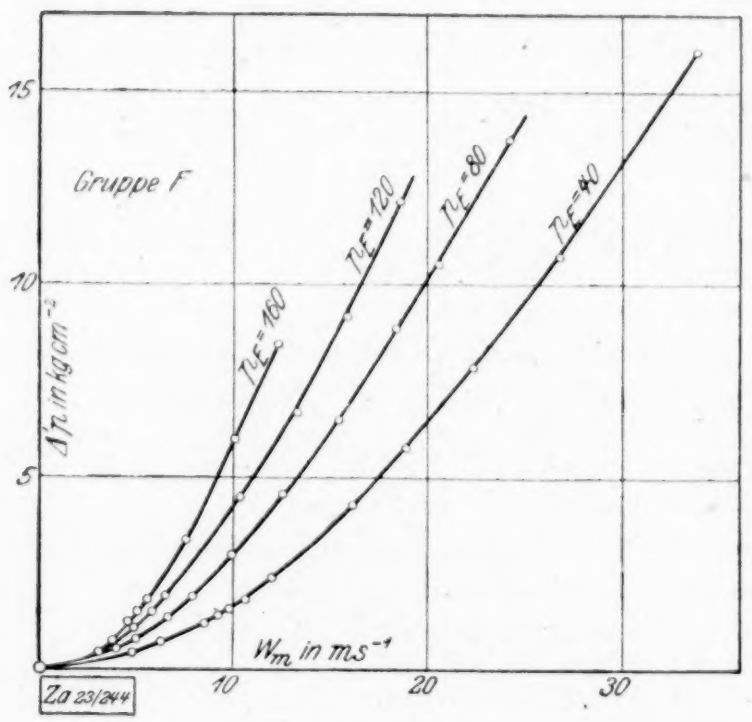


Abb. 15

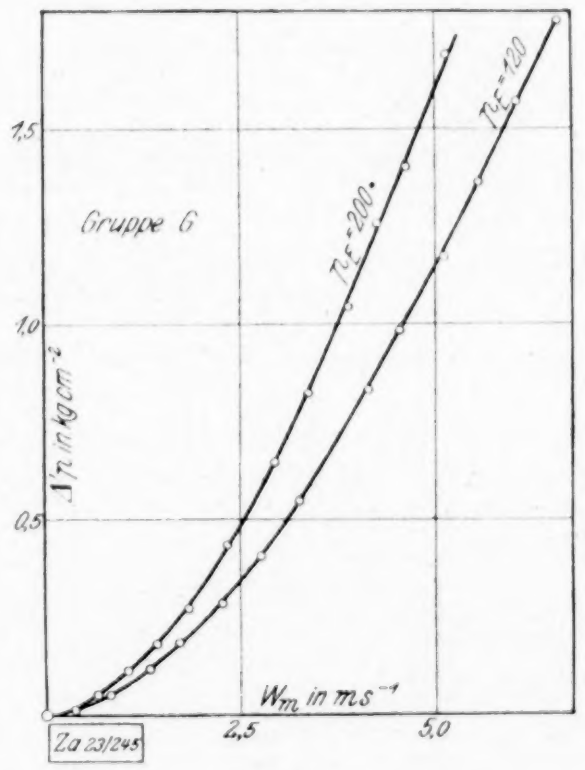


Abb. 16

beim Werte $K = 2000$, um dann allmählich von $K = 6500$ ab in verschiedene untereinander parallele Geraden mit der Neigung $n = 4{,}5$ überzugehen.

Auf der obersten Geraden (Abb. 18) liegen die Werte der Versuchsreihe mit den Enddrucken $p_e = 200$, 160 und 120 kg/cm² der Gruppe B, auf der nächsten Geraden die Werte derselben Gruppe mit den Enddrucken 80 und 40 kg/cm², dann folgen sämtliche Werte der Gruppe D auf einer nächsten Parallelen und dicht darunter die Werte der Gruppe E auf einer vierten.

Für diese drei Gruppen mit lichten Rohrweiten kleiner als 0,5 mm entspricht zwar die Neigung der Geraden dem Werte von Blasius und Ombeck, die Konstante m dagegen

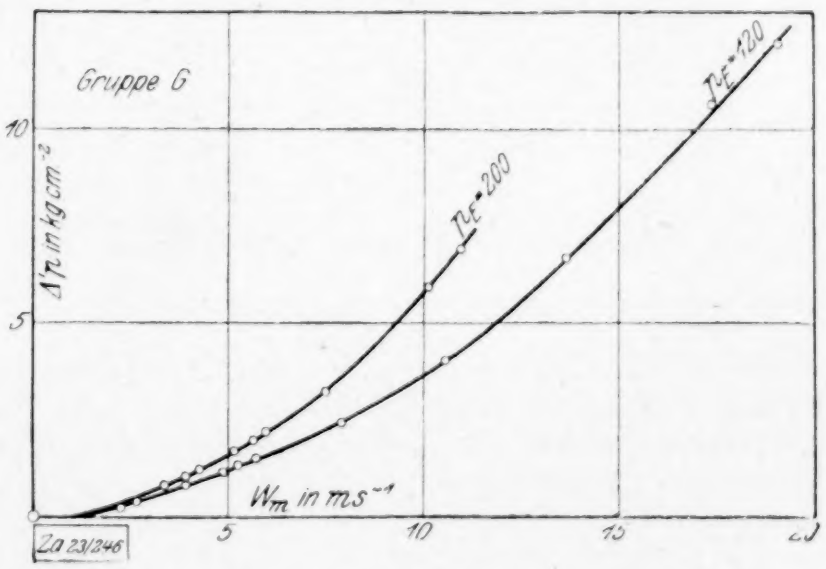


Abb. 17

ist um so größer, je kleiner d ist, und bei dem kleinsten Durchmesser ist m außerdem abhängig von p_e, d. h. von der Dichte des Gases. Die Gruppen D und E fallen fast zusammen, da sich ihre Durchmesserwerte nur um 5 vH unterscheiden.

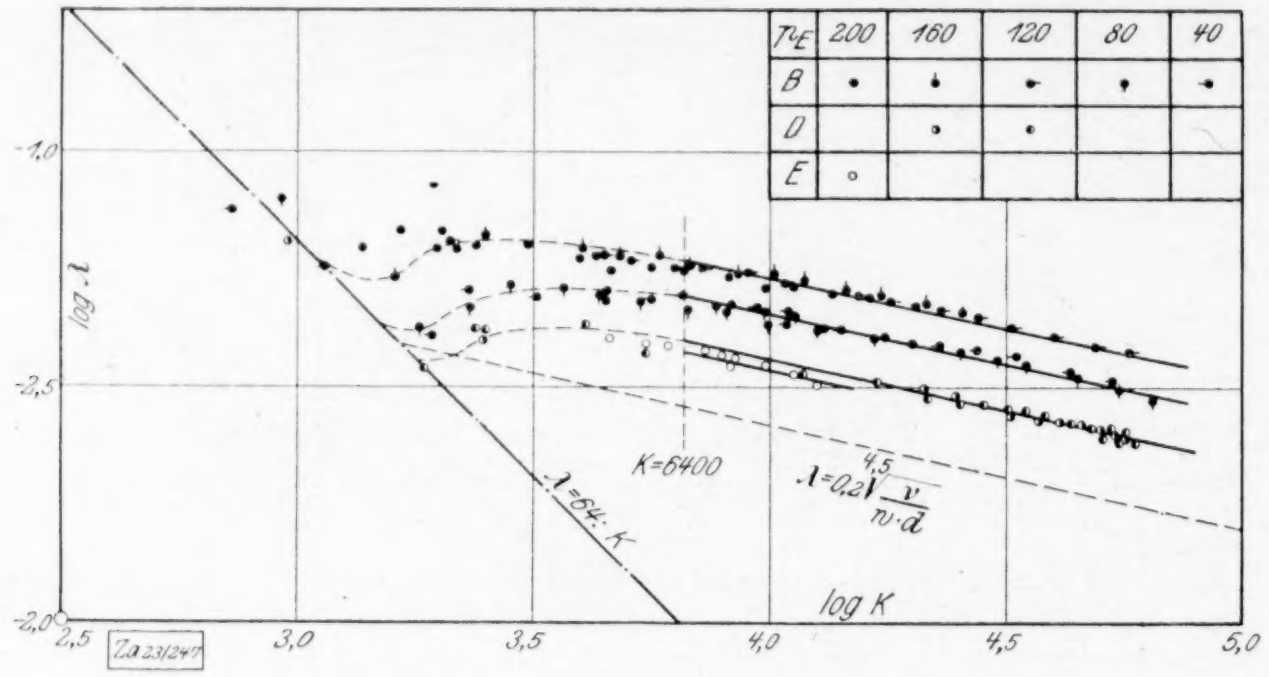


Abb. 18

Alle Werte der Gruppen F und G ($d > 0{,}5$ mm) liegen auf ein und derselben Geraden (Abb. 19); für diese beiden Gruppen ist der Blasiussche Ansatz bestätigt.

Faßt man die verschiedenen Ergebnisse zusammen, so findet sich, daß auch im Gebiete von hohen Drucken der Aehnlichkeitsansatz Gültigkeit hat, wie dies die Versuche mit $d > 0{,}5$ mm zeigen. Es wurden für m und n die Werte: $m = 0{,}2$ und $n = 4{,}5$ gefunden. Bei kleineren Durchmessern ist der Ansatz nicht ohne weiteres gültig, m ist ist hier eine Funktion des Durchmessers und der Gasdichte.

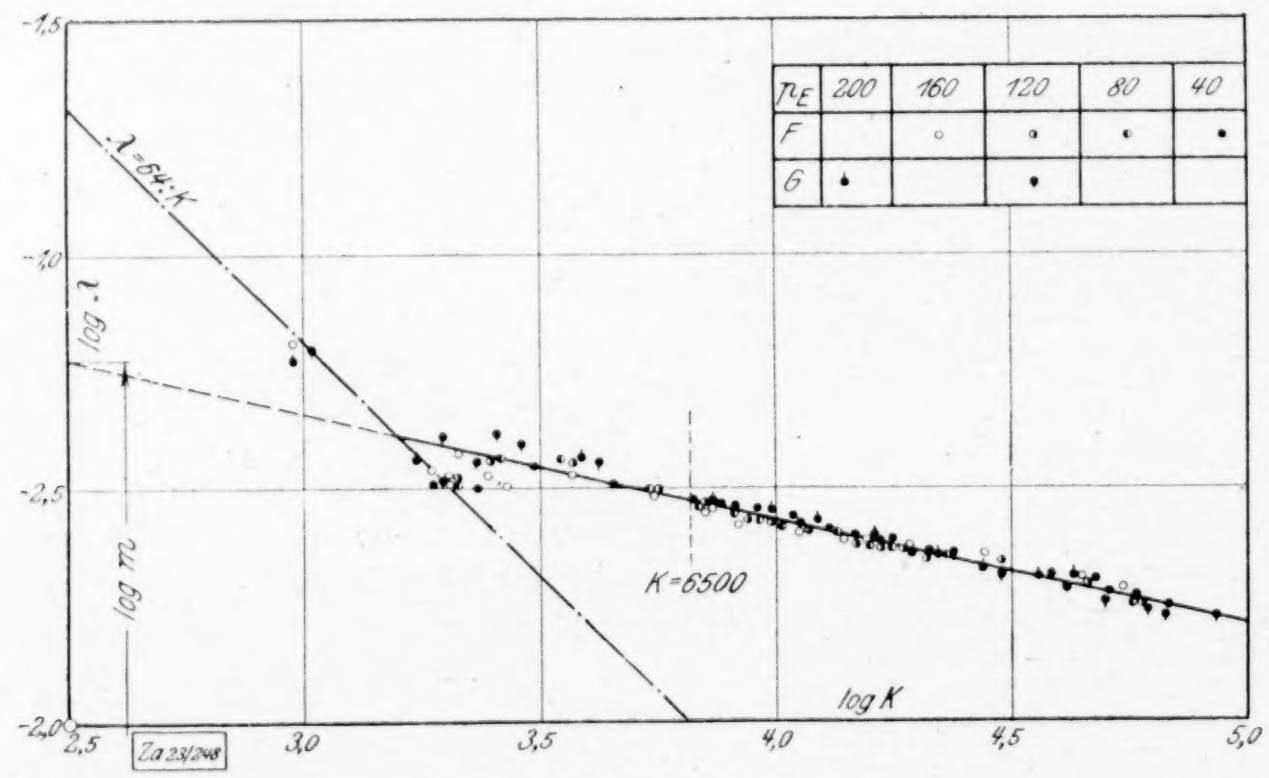


Abb. 19

6. Anwendung der Ergebnisse auf ein technisches Problem. Zunächst werde der oben gefundene Ausdruck $\lambda = m K^{-1/n}$ in die Gl. $\Delta p = \lambda \gamma \frac{l}{D} \frac{w^2}{2g}$ eingesetzt; dann werde w durch das in der Zeiteinheit durchströmende Gasgewicht G, γ durch p ersetzt, und alle Faktoren, außer p, l, G, η, D und p in einer Konstanten C vereinigt. Die Gleichung lautet dann, wenn sie in Form einer Differentialgleichung geschrieben wird,

$$\frac{dp}{dx} = C \frac{G^{2-1/n} \eta^{1/n}}{D^{5-1/n} p}.$$

Damit dp eine positive Druckänderung bedeutet, muß x vom Rohrende aus gerechnet werden.

Hieraus ist ersichtlich, wie sich Fördermenge, Rohrdurchmesser und Druckverlust verhalten, wenn auf eine bestimmte Entfernung eine Gasmenge einmal bei niederem Druck und zweitens bei erhöhtem Druck transportiert wird. Die Veränderlichkeit von η hat, da sie mit $^1/_n$-Potenz in Rechnung steht, dabei einen geringen Einfluß. Bei einer Drucksteigerung von 1 auf 100 at z. B. und einem dementsprechenden Anwachsen von η um 23 vH beträgt dieser Einfluß nur 5 vH. Er sei deshalb bei den folgenden Betrachtungen vernachlässigt.

Nach der Gleichung ist bei gleichbleibendem Rohrdurchmesser der Druckabfall für ein und dieselbe Gasmenge einmal umgekehrt proportional der Gasdichte, zweitens wächst bei gleichem Druckabfall die Förderleistung mit der $(2 - {}^1/_n)$. Wurzel aus der Gasdichte, oder drittens schließlich nehmen bei gleichem Druckverlust und gleicher Förderleistung die Rohrweiten mit der $(5 - {}^1/_n)$. Wurzel aus der Gasdichte ab.

Die Erhöhung des Druckes ist also ein Mittel, um in allen den Fällen, in denen es sich darum handelt, Gasmengen auf größere Entfernung zu transportieren, entweder bei gleichen Rohrweiten und gleicher Förderleistung den Druckverlust zu verringern oder bei gleichen Rohrweiten und gleichem Druckverlust die Förderleistung zu erhöhen, oder schließlich, um bei gleichbleibendem Druckverlust und gleichbleibender Förderleistung Rohre von geringerer lichter Weite benutzen zu können.

Die Technik hat hiervon Gebrauch gemacht, einmal um bei Gasversorgungen bei wachsendem Bedarf größere Förderleistungen in einem vorhandenen Rohrnetz zu erzielen, und zweitens, um Gasfernleitungen mit geringen Rohrdurchmessern bauen zu können. Man ist hierbei in den meisten Fällen nicht über Anfangsdrucke von 6 at hinausgegangen — eine Ausnahme machen die amerikanischen Naturgasfernleitungen mit Drucken von 25 at — und hat stets das Gas gegen Atmosphärendruck ausströmen lassen.

Der Druckabfall verläuft längs des Rohres, wie oben angeführt, nach einer Parabel, deren Scheitelpunkt bei dem Enddruck gleich Atmosphärendruck liegt. Im letzten Teil der Rohrleitung wird das Gas den größten Teil des gesamten Druckverlustes erleiden, und damit wird das letzte Stück die am unwirtschaftlichsten arbeitende Strecke der ganzen Leitung sein. Dies kann man dadurch vermeiden, daß man das Gas nicht gegen Atmosphärendruck, sondern gegen einen höheren Enddruck ausströmen läßt; man rückt dadurch auf der Druckparabel weiter von dem Scheitelpunkt ab. Das Gas würde dann nur einen Teil seines Ueberdruckes zur Ueberwindung des Rohrleitungswiderstandes verbrauchen, der Rest könnte zum Beispiel in Druckluftmaschinen als Energie wiedergewonnen werden. Da für die Beurteilung der Wirtschaftlichkeit einer solchen Anlage nicht so sehr der Druckverlust als der Arbeitsverlust maßgebend ist, sei letzterer der Betrachtung zugrunde gelegt. Die Kompressions- bezw. Expansionsarbeit sei als isotherm angenommen, dann ist für die Gasmenge in der Zeiteinheit G die Arbeit

$$dL = GRT\frac{dp}{p}$$

und die spez. Arbeit bezogen auf die Einheit der Rohrlänge

$$\frac{dL}{dx} = \frac{GRT}{p}\frac{dp}{dx}.$$

Setzt man obige Differentialgleichung des Druckverlustes in diese Gleichung ein und nimmt η mit in die Konstante C_1 hinein, dann ist

$$\frac{dL}{dx} = RTC_1\frac{G^{3-1/n}}{p^2 D^{5-1/n}}.$$

Der Arbeitsverlust wird hiernach in einer Rohrleitung bei gleichbleibender Förderleistung von dem Ausdruck

$$D^{5-1/n}p^2$$

abhängen, der mit $n = 4{,}5$ lautet

$$D^{4{,}78}p^2.$$

Man sieht, daß, wenn man in einer vorhandenen Rohrleitung die gleiche Gasmenge einmal im Niederdruck gegen Atmosphärendruck und zweitens im Hochdruck gegen einen höheren Enddruck durchströmen läßt, der Arbeitsverlust umgekehrt proportional dem Quadrat der Steigerung des Gasdruckes ist. Die Ersparnis an Arbeitsverlust ist also

bei einer Drucksteigerung größer als die Ersparnis an Druckverlust, was ohne weiteres erklärlich ist.

Legt man andererseits den gleichen Arbeitsverlust zugrunde und fragt, wieviel der Rohrdurchmesser kleiner werden kann, wenn der mittlere Druck des Gases gesteigert wird, ohne daß sich dadurch die Förderleistung ändert, dann lautet hierauf die Antwort, daß für diesen Fall d mit der $\frac{2}{4{,}78}$. Potenz von p abnimmt. Hier sieht man, daß praktisch der Drucksteigerung sehr bald eine Grenze gesetzt ist; der Rohrdurchmesser nimmt mit zunehmendem Druck nur wenig ab, bei einer Steigerung von 1 auf 10 at Druck z. B. wird er um das 2,6fache, bei einer weiteren Steigerung auf 100 at nur um das 6,6fache kleiner. Es wird also bei einer Steigerung des Druckes sehr bald die Grenze erreicht sein, wo die Wandstärke des Rohres so stark sein müßte, daß ein derartiges Rohr unwirtschaftlich sein würde.

In der Steigerung des Druckes zu größeren Werten wie bisher ist immerhin ein Mittel gegeben, ohne Vergrößerung des Arbeitsverlustes geringe Rohrweiten zu erhalten und die Druckfestigkeit der Rohre auszunutzen.

Ein weiteres Mittel liegt darin, die Rohrweite nicht auf der ganzen Länge der Leitung konstant, sondern am Anfang, wo das Gas die größere Dichte hat, enger zu wählen als am Ende. Ein Gesetz, nach dem der Durchmesser d mit dem Abstande x von dem Rohranfang zunimmt, kann man aufstellen, wenn man z. B. einen konstanten Arbeitsverlust dL/dx längs des ganzen Rohres als Bedingung stellt. Es ist dann in der Gleichung

$$D^{5-1/n}\, p^2 = \text{konst.}$$

p durch x zu ersetzen. Zu diesem Zweck differenziert man sie zunächst und dividiert sie gleichzeitig durch dx, dann ist

$$\left(5 - \frac{1}{n}\right) D^{4-1/n}\, p^2 \frac{dD}{dx} + D^{5-1/n}\, 2p \frac{dp}{dx} = 0.$$

Setzt man aus der Differentialgleichung des Strömungswiderstandes, in der η wieder in die Konstante C_1 hineingenommen wird,

$$p \frac{dp}{dx} = C_1 \frac{G^{2-1/n}}{D^{5-1/n}}$$

und aus der Gleichung des Arbeitsverlustes

$$p^2 = \frac{R\,T\,C_1\,G^{3-1/n}}{D^{5-1/n}\,\frac{dL}{dx}}$$

in die Differentialgleichung ein, dividiert die Gleichung durch $C_1\, G^{2-1/n}$ und setzt für den konstanten Arbeitsverlust

$$\frac{dL}{dx} = a,$$

dann lautet die Differentialgleichung nach Division durch C_2

$$\left(5 - \frac{1}{n}\right) \frac{R\,T\,G}{a} \frac{1}{D} \frac{dD}{dx} + 2 = 0.$$

Diese Gleichung wird jetzt integriert und zwar für D in den Grenzen von Enddurchmesser D_e bis zu einem Durchmesser D und dementsprechend von $x = 0$ bis $x = x$. Sie lautet in diesen Grenzen integriert

$$\frac{\left(5 - \frac{1}{n}\right) R\,T\,G}{2a} \ln \frac{D_e}{D} = x.$$

Der Durchmesser nimmt demnach nach einer Exponentialkurve zu. Die Abnahme des Druckes erfolgt in einem derartigen Rohre nach einer ähnlichen Kurve. Ihre Gleichung findet man durch Integration der Differentialgleichung des Arbeitsverlustes in den Grenzen p und p_e; $x = x$ und $x = 0$. Sie lautet

$$\ln \frac{p}{p_e} = \frac{a}{R\,T\,G}\, x.$$

Zur Veranschaulichung und Erläuterung der vorstehenden Ausführungen sei im folgenden der Einfluß der Drucksteigerung mit Erhöhung des Enddruckes an einem Beispiel gezeigt.

Es sei die Aufgabe gegeben, auf 200 km Länge 600 m^3/h Gas zu transportieren. Nimmt man eine Rohrweite von 200 mm, dann muß man dem Gase am Anfang einen Ueberdruck von 6 at geben, damit es am Ende mit Atmosphärendruck ankommt. Der Arbeitsverlust in der Sekunde beträgt 40 PS. Wählt man den Enddruck gleich 9,5 at, so reduziert sich der Rohrdurchmesser auf 150 mm und der Arbeitsverlust auf 10 PS. Der Anfangsdruck ist dann 15,5 at.

Wählt man den Enddruck gleich 19 at, so kommt man mit einem Rohrdurchmesser von 110 mm aus; der Arbeitsverlust bleibt 10 PS und der Anfangsdruck wird 29 at. Läßt man für den letzten Fall die Größe des Durchmessers nach der »Kurve gleichen Arbeitsverlustes« vom Rohranfang bis zum Werte d_e am Rohrende wachsen, dann nimmt der Rohrdurchmesser von dem Werte $d = 90$ mm am Rohranfang fast linear bis zum Werte $d = 110$ mm an der Mündung zu. Man sieht aus diesem Beispiel, daß durch eine Erhöhung des Enddruckes auf 19 at der Energieverlust auf ein Viertel, der Rohrdurchmesser auf die Hälfte sinkt.

Es kann im Rahmen dieser Betrachtung nicht entschieden werden, wie groß der durch Druckerhöhung erreichte Vorteil bei einer Gasfernleitung tatsächlich ist; das hängt von den verschiedensten Umständen ab, insbesondere von den Folge- und Begleiterscheinungen, die mit der Anwendung von hohen Drucken verknüpft sind. So sollen diese Schlußbetrachtungen nichts weiter als eine Anregung bedeuten. 275

Über die Böschungsflächen mit Kegelschnitten als Basiskurven.

Von **FRIEDRICH SCHILLING** in Danzig-Langfuhr.

Die folgenden Betrachtungen knüpfen an die sorgfältig durchgeführte, im wesentlichen experimentelle Arbeit von Felix Auerbach an: Die Gleichgewichtsfiguren pulverförmiger Massen [1]). Diese Untersuchungen beanspruchen besonderes Interesse wegen ihrer engen Beziehung zu Vorkommnissen in der Natur, wie bei den Dünen, und in der Bautechnik, wie bei aufgeschütteten Erdwällen mit oder ohne aufgemauerte Stützwände, oder bei analogen Erdaushebungen. In jener Arbeit handelt es sich um die Ermittlung der Oberflächen von Sandmassen oder Samenkörnerhaufen, die sich über einem frei gelagerten, horizontalen Flächenstücke, etwa einem Quadrat oder einer Ellipse, aufschütten lassen. Der Begriff »Oberfläche« für solche Gebilde ist natürlich als ein idealisierter anzusehen, der mit der exakten physikalischen Oberfläche des Haufens der Körper (wenn man von einer solchen überhaupt sprechen will) natürlich nichts zu tun hat. Als »Oberfläche« gilt hier die neben der Basis auftretende Begrenzungsfläche eines geometrischen Körpers, welche den Körnerhaufen überall »tangierend umschließt«. Diese Oberfläche wird dann als Böschungsfläche bezeichnet. Die Versuche von Auerbach haben sehr bemerkenswerte Resultate ergeben, die er auch in ihrem Wesen zu erklären versucht. Die über einer Halbebene sich erhebende Gleichgewichtsfigur z. B. zeigt eine im wesentlichen ebene Böschungsfläche mit einem dem benutzten Material eigenen »Böschungswinkel«; nur an der Kante der Halbebene und, wenn noch eine zu dieser Kante parallele senkrechte Stützmauer vorhanden ist, in dem an diese anstoßenden Teile zeigen sich Abweichungen von dem sonst geradlinigen Querschnitt der Gleichgewichtsfigur. Im Gegensatz zu solchen wirklichen Böschungsflächen werden in der Geometrie als Böschungsflächen solche Flächen bezeichnet, deren Tangentialebenen stets denselben Neigungswinkel δ (»Böschungswinkel«) gegen die wagerechte Ebene besitzen. Wie leicht zu beweisen ist, sind solche Flächen immer abwickelbar. Die Böschungsflächen des Mathematikers sind daher gewiß nur als eine Annäherung an die wirklichen Verhältnisse anzusehen, zu deren Verständnis sie jedoch erheblich beitragen.

1. Allgemeine Eigenschaften der Böschungsflächen. Wir wollen in Kürze einige allgemeine Bemerkungen über die mathematischen Böschungsflächen [2]) vorausschicken.

[1]) Annalen der Physik, 4. Folge, Bd. 5, 1901, S. 170 bis 219.

[2]) Böschungsflächen sind zuerst behandelt in dem Werke De la Gournerie, Traité de géométrie descriptive, t. 1, 3. éd., Paris 1891, S. 105 bis 127, t. 2, 2. éd., Paris 1885, S. 54. Als Beispiel sind dort insbesondere auch die Böschungsflächen durch eine horizontale oder geneigte Ellipse besprochen. Auch bei Chr. Wiener, Lehrbuch der Darstellenden Geometrie, Bd. 2, Leipzig 1887, S. 387 bis 388, werden die Böschungsflächen (Flächen gleichförmiger Neigung) erwähnt. Endlich ist ihnen eine zusammenfassende Darstellung gewidmet in der Dissertation: R. Ackermann, Böschungsstrahlen und Böschungsflächen, Halle 1913. Dort sind insbesondere auch die Böschungsflächen der Flächen 2. Grades behandelt.

Der Schnitt der einzelnen Fläche mit einer ausgewählten Horizontalebene sei als Basiskurve bezeichnet. Ein einfaches Beispiel der Böschungsflächen ist ersichtlich die Tangentenfläche einer gewöhnlichen Schraubenlinie, die abwickelbare Schraubenfläche. Man kann sich einen Teil dieser Fläche ja dadurch erzeugt denken, daß man ein rechtwinkliges Dreieck, dessen eine Kathete mit einer Erzeugenden eines vertikalen Kreiszylinders zusammenfällt, auf diesen aufwickelt. Die Hypotenuse beschreibt dann im Raum die Fläche, die freie Ecke des Dreiecks die Basiskurve, eine gespitzte Kreisvolvente, während die aufgewickelte Hypotenuse auf dem Zylinder die Schraubenlinie, d. h. die Rückkehrkante der Fläche erzeugt (Abb. 1) [1]).

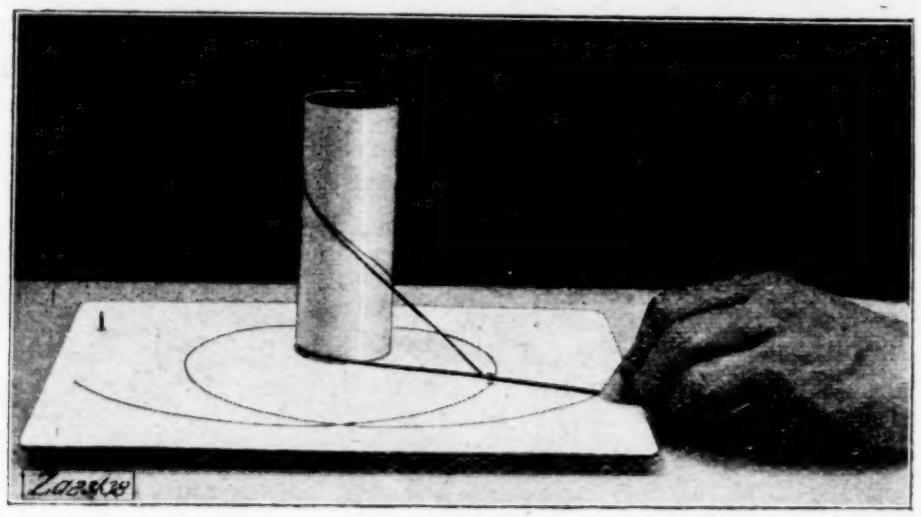


Abb. 1

Ganz analog gelten für jede Böschungsfläche folgende Sätze:

1. Die Erzeugenden (zugleich Fallinien) der Fläche stehen stets auf der horizontalen Basiskurve senkrecht. Die senkrechten Projektionen der Erzeugenden auf die Horizontalebene sind die Normalen der Basiskurve.

2. Da durch jede Tangente der Basiskurve sich zwei Ebenen mit der Neigung δ legen lassen, so besteht die gesamte Böschungsfläche der Basiskurve stets aus zwei Teilen, die jedoch nicht eine analytische Fläche zu bilden brauchen.

3. Wie die Normalen der Basiskurve ihre Evolute — in obigem Beispiel der Abb. 1 den Grundkreis des Zylinders — umhüllen, so umhüllen die Erzeugenden der Böschungsfläche ihre Rückkehrkante, die auf dem über der genannten Evolute sich vertikal erhebenden Zylinder liegt. Die Tangentialebenen der Fläche sind Schmiegungsebenen der Rückkehrkurve. Jede Erzeugende der Fläche schließt mit der zugehörigen Normalen der Basiskurve den Böschungswinkel δ ein, der in unserem Beispiel gleich dem Steigungswinkel der Schraubenlinie ist.

4. Die Rückkehrkante ist daher auch isogonale Trajektorie der Erzeugenden des »Evolutenzylinders«. Ganz wie im obigen Beispiel und durchaus auch der Erzeugung einer ebenen Evolvente aus ihrer Evolute entsprechend können wir allgemein jede Böschungsfläche durch Abwicklung eines rechtwinkligen Dreiecks auf dem vorgegebenen Evolutenzylinder entstanden denken [2]).

5. Jede zur Ebene der Basiskurve parallele Ebene schneidet die Böschungsfläche in einer Kurve, die ebenfalls Evolvente für den zugehörigen Normalschnitt des Evolutenzylinders ist, also senkrecht auf die Ebene der Basiskurve projiziert eine äquidistante Kurve zur Basiskurve ergibt.

6. Jede Böschungsfläche mit dem Böschungswinkel δ hat einen Umdrehungskegel mit beliebig gewählter Spitze und dem Oeffnungswinkel $2\left(\frac{\pi}{2}-\delta\right)$ als Richtungs-

[1]) Diese Figur ist die Abbildung eines Modelles, welches ich zusammen mit den Fadenmodellen der Böschungsflächen mit einer Ellipse, Hyperbel oder Parabel als Basiskurve auf der Naturforscherversammlung in Nauheim 1920 der Mathematiker-Vereinigung vorgelegt habe. — Näheres über diese spezielle Böschungsfläche gibt: Frieda Nagel, Die Schraubenlinien, Dissertation, Halle a. S. 1912, S. 24 bis 29.

[2]) Der Evolutenzylinder ist ja auch der eine Mantel der zu der Böschungsfläche gehörenden Zentrafläche, während der andere Mantel wie bei allen abwickelbaren Flächen in eine Kurve im Unendlichen ausgeartet ist. Die Erzeugenden des Evolutenzylinders sind ferner die rektifizierenden Geraden der Rückkehrkante. Die Rückkehrkurven der Böschungsflächen umfassen also jene interessante Gruppe von Raumkurven (die »allgemeinen Schraubenlinien«), bei denen die rektifizierenden Geraden parallel sind oder das Verhältnis der Krümmung zur Windung konstant ist oder für die der Richtungskegel der Tangenten ein Rotationskegel ist. Vgl. deswegen z. B. G. Scheffers, Einführung in die Theorie der Kurven in der Ebene und im Raum, Leipzig 1901, S. 224 und S. 293, oder W. Schell und E. Salkowski, Allgemeine Theorie der Kurven doppelter Krümmung. 3. Aufl., Leipzig 1914, S. 109. Vgl. auch Frieda Nagel, Dissert., Halle 1912.

kegel der Erzeugenden, d. h. die Tangentialebenen der Böschungsfläche berühren zugleich außer der Basiskurve auch den unendlich fernen ebenen Schnitt dieses Richtungskegels. Diese unendlich ferne Schnittlinie ist also (gegebenfalls einfach oder mehrfach gerechnet) ein Teil des Schnittes der Böschungsfläche mit der unendlich fernen Ebene.

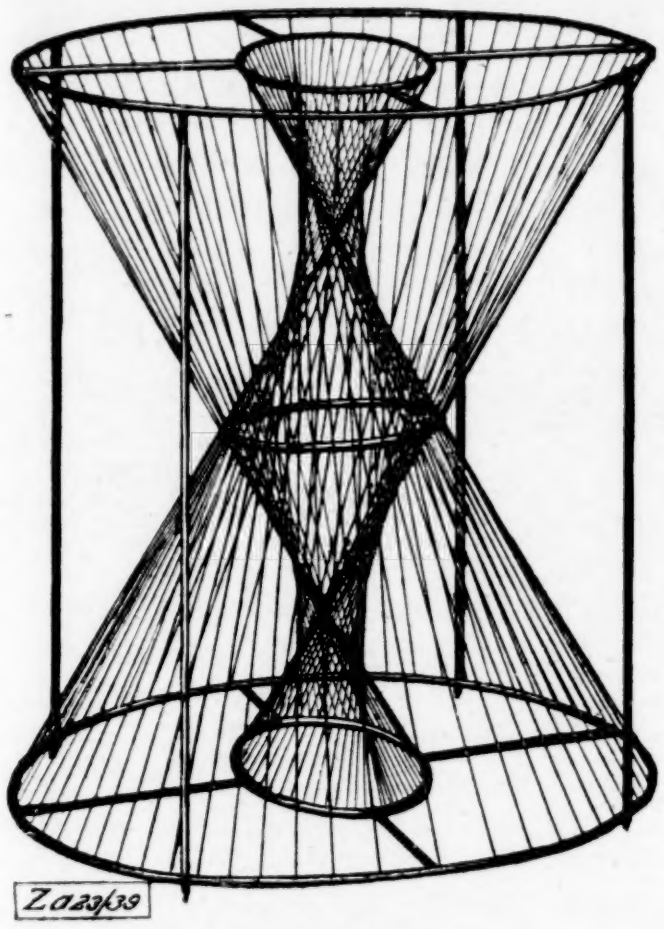


Abb. 2

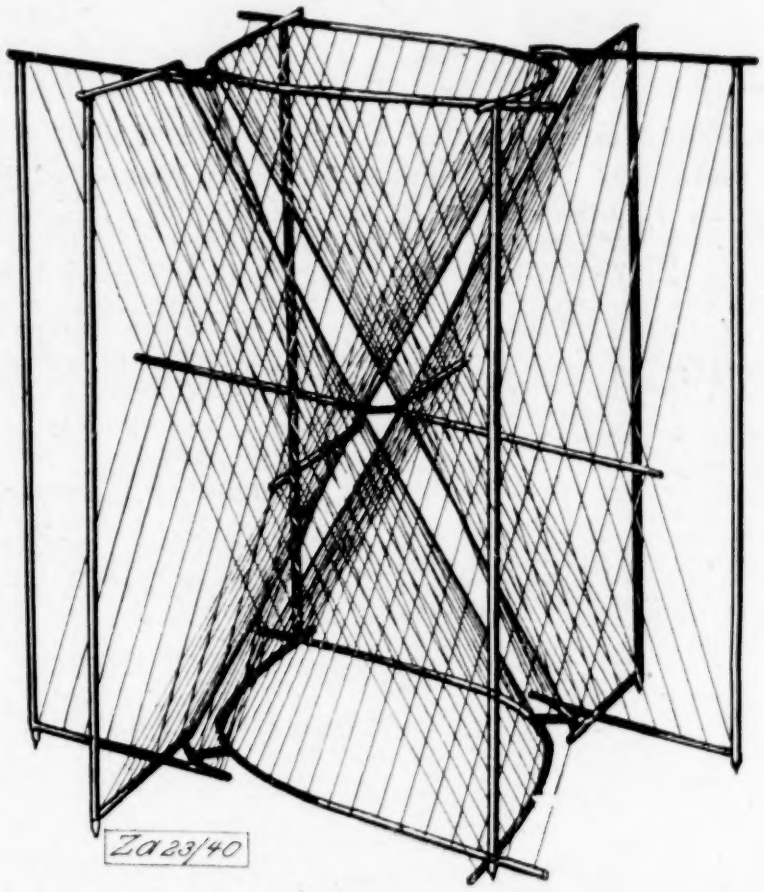


Abb. 3

Ein anderes interessantes Beispiel ergibt die Böschungsfläche einer logarithmischen Spirale, deren Evolute eine kongruente Spirale ist; eine solche Böschungsfläche ist zugleich die Tangentenfläche für eine Loxodrome eines Rotationskegels[1]).

2. Die Böschungsfläche einer Basisellipse. Nach diesen allgemeinen Vorbemerkungen wenden wir uns zu der Untersuchung der Böschungsflächen mit einer horizontalen Ellipse, Hyperbel oder Parabel als Basiskurve. Die entsprechenden drei Modelle sind in den Abb. 2 bis 4 wiedergegeben.

Wir besprechen zuerst den Fall der Ellipse; sie sei zugleich mit dem Böschungswinkel $\delta < \frac{\pi}{2}$ durch die Gleichung gegeben:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

oder durch die Gleichungen mit dem Parameter φ $(0 \leqq \varphi < 2\pi)$

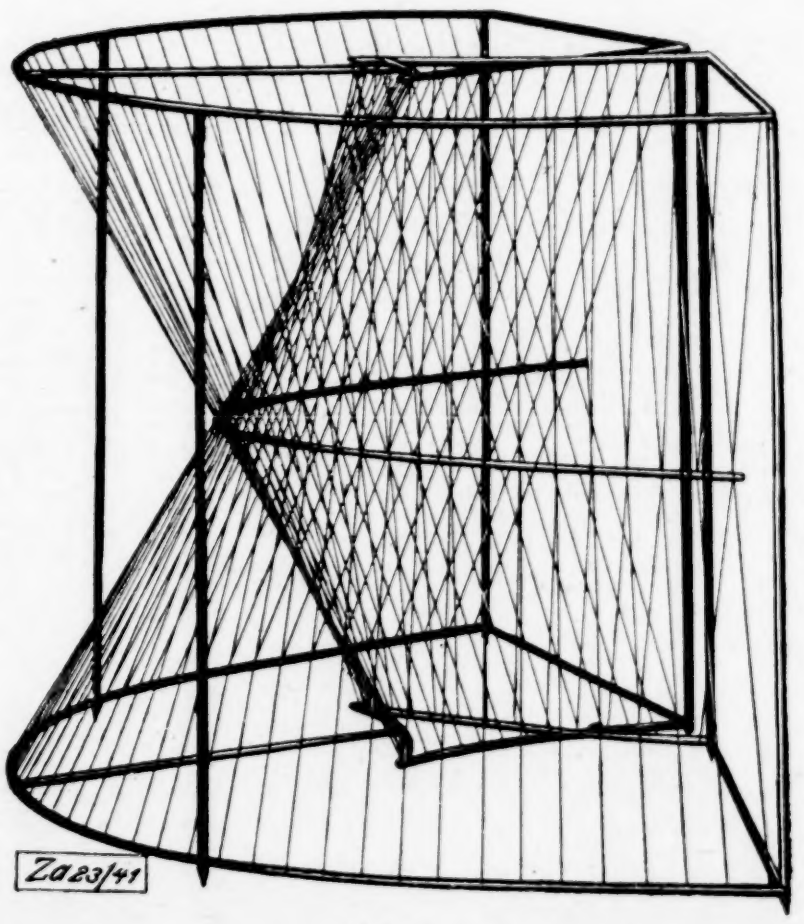


Abb. 4

$$x = a \cos \varphi, \quad y = b \sin \varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1\,a, b).$$

Die Ellipsennormale im Ellipsenpunkte (x_0, y_0) hat die Gleichung:

$$y_0\, a^2 (x - x_0) - x_0\, b^2 (y - y_0) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

[1]) Vgl. deswegen Schell-Salkowski, l. c. S. 114 bis 120.

oder die Gleichungen mit dem Parameter s':

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + \frac{x_0 b^2}{+\sqrt{x_0^2 b^4 + y_0^2 a^4}} s' = a\cos\varphi + \frac{b\cos\varphi}{+\sqrt{b^2\cos^2\varphi + a^2\sin^2\varphi}} s' \\ y &= y_0 + \frac{y_0 a^2}{+\sqrt{x_0^2 b^4 + y_0^2 a^4}} s' = b\sin\varphi + \frac{b\sin\varphi}{+\sqrt{b^2\cos^2\varphi + a^2\sin^2\varphi}} s' \end{aligned}\right\} \quad (2\,\mathrm{a,\ b}).$$

Der Parameter s' ist ersichtlich die (positive oder negative) Entfernung des Punktes (x, y) der Normalen vom Ellipsenpunkte (x_0, y_0), und zwar ist für die in unmittelbarer Nähe des Punktes (x_0, y_0) außerhalb der Ellipse gelegenen Punkte der Normalen der Parameter s' positiv, wie man am einfachsten für den Scheitelpunkt ($x_0 = a$, $y_0 = 0$) erkennt. Hieraus ergeben sich die Gleichungen der Böschungsfläche mit den Parametern $s = \frac{s'}{\cos\delta}$ und φ, wenn man noch

$$\cos\delta = \nu \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

setzt:

$$\left.\begin{aligned} x = a\cos\varphi + \frac{b\cos\varphi}{+\sqrt{b^2\cos^2\varphi + a^2\sin^2\varphi}}\nu s,\quad y = b\sin\varphi + \frac{a\sin\varphi}{+\sqrt{b^2\cos^2\varphi + a^2\sin^2\varphi}}\nu s, \\ z = \pm\sqrt{1-\nu^2}\, s \end{aligned}\right\} \quad (4\,\mathrm{a,\ b,\ c}).$$

Der Parameter s ist die (positive oder negative) Entfernung des Flächenpunktes Q (x, y, z) vom Ellipsenpunkt P $(x_0, y_0, 0)$, Abb. 5.

An Stelle des Parameters φ sei jetzt der neue Parameter t eingeführt durch

$$\sin^2\varphi = b^2\frac{a^2t^2-1}{a^2-b^2}, \quad \cos^2\varphi = a^2\frac{1-b^2t^2}{a^2-b^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5\,\mathrm{a,\ b}),$$

woraus folgt:

$$b^2\cos^2\varphi + a^2\sin^2\varphi = a^2b^2t^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6).$$

Es ist also

$$t = \frac{+\sqrt{b^2\cos^2\varphi + a^2\sin^2\varphi}}{ab} = +\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6')$$

und es gilt $1/a \leqq t \leqq 1/b$ für reelle Werte φ.

Dieser Ausdruck $t = \sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}}$ stellt den reziproken Wert des Lotes l vom Koordinatenanfangspunkt auf die Tangente der Basisellipse (1) im Punkte (x_0, y_0) dar. Durch Einsetzen dieses Wertes ergibt sich die sehr einfache Form der Flächengleichungen mit den Parametern s, t:

$$x = \pm\sqrt{\frac{1-b^2t^2}{a^2-b^2}}\left(a^2 + \nu\frac{s}{t}\right), \quad y = \pm\sqrt{\frac{a^2t^2-1}{a^2-b^2}}\left(b^2 + \nu\frac{s}{t}\right), \quad z = \pm\sqrt{1-\nu^2}\, s \quad (7\,\mathrm{a,\ b,\ c}),$$

wo die doppelten Vorzeichen voneinander unabhängig sind. Dem entspricht die Tatsache: Die Böschungsfläche der Ellipse ist zu den drei Koordinatenebenen symmetrisch.

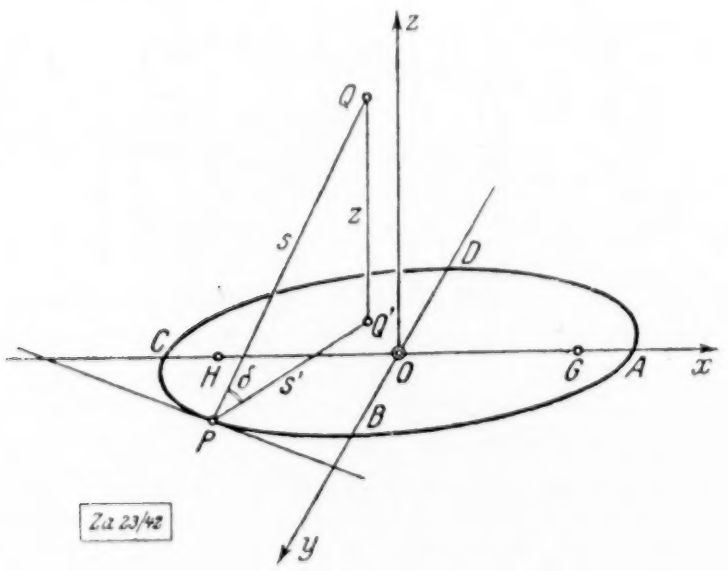


Abb. 5

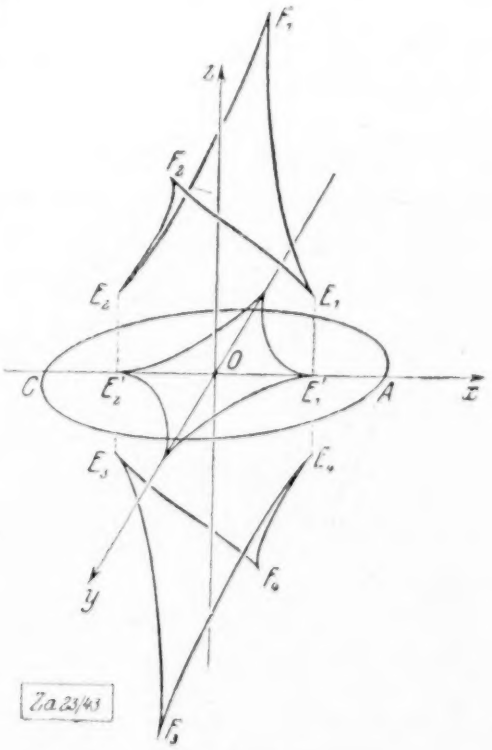


Abb. 6

Aus den Flächengleichungen sowohl wie aus der unmittelbaren Anschauung erkennt man ferner: Die für zwei verschiedene Werte von δ sich ergebenden Böschungsflächen derselben Ellipse sind zueinander perspektiv-affin mit der Ellipsenebene als Affinitätsebene und der zu ihr senkrechten Richtung als Richtung der Affinitätsstrahlen (d. h. die eine Fläche geht aus der andern hervor, wenn man bei dieser nur die z-Koordinate ähnlich vergrößert). Es würde daher für die ganze folgende Betrachtung an sich genügen, z. B. $\delta = \frac{\pi}{4}$, d h. $\nu = + \frac{1}{\sqrt{2}}$ zu setzen. Daß ferner zu ähnlichen Basisellipsen auch ähnliche Böschungsflächen gehören, ist an sich klar.

3. Die Rückkehrkante der Böschungsfläche. Die Rückkehrkante der Böschungsfläche liegt auf dem Zylinder, der sich über der Evolute der Ellipse mit den bekannten Gleichungen:

$$(ax)^{2/3} + (by)^{2/3} = (a^2 - b^2)^{2/3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

oder

$$x = \frac{a^2 - b^2}{a} \cos^3 \varphi, \quad y = - \frac{a^2 - b^2}{b} \sin^3 \varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8'\,\mathbf{a, b})\,^{1})$$

senkrecht zur xy-Ebene erhebt, Abb. 6.

Die Gleichung (8) geht durch Kubieren über in die Form:

$$(ax^2) + (by^2) - (a^2 - b^2)^2 = - 3\,((ax)^{2/3} + (by)^{2/3})\,(ax)^{2/3}\,(by)^{2/3}$$

oder, wenn man für den ersten Klammerfaktor der rechten Seite $(a^2 - b^2)^{2/3}$ einsetzt und dann nochmals kubiert:

$$[a^2x^2 + b^2y^2 - (a^2 - b^2)^2]^3 + 27\,a^2b^2\,(a^2 - b^2)\,x^2y^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8').$$

Die Evolute der Ellipse ist also eine Kurve 6. Ordnung.

Die Rückkehrkante wird den Gleichungen (8 a, b) gemäß durch die Gleichungen mit dem Parameter φ bestimmt:

$$x = \frac{a^2 - b^2}{a} \cos^3 \varphi, \quad y = - \frac{a^2 - b^2}{b} \sin^3 \varphi, \quad z = \pm\, \varrho \operatorname{tg} \delta \quad . \quad . \quad (9\,\mathbf{a, b, c}),$$

wo der Krümmungsradius ϱ der Ellipse durch die Gleichung

$$\varrho = \frac{(b^2 \cos^2 \varphi + a^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}}{ab} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

gegeben ist. Bei Benutzung der Substitutionen (5 a, b) und (6) gehen diese Gleichungen über in die einfache Form:

$$x = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}\,(1 - b^2t^2)^{3/2}, \quad y = - \frac{b^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}\,(a^2t^2 - 1)^{3/2}, \quad z = \pm\, a^2b^2 \operatorname{tg} \delta\, t^3 \quad (10\,\mathbf{a, b, c}).$$

Die Elimination von t aus den beiden ersten Gleichungen ergibt ja die Gleichung (8) oder (8'). Ebenso könnnen wir auch t aus der ersten und dritten oder aus der zweiten und dritten Gleichung eliminieren. So ergeben sich die beiden Gleichungen:

$$(\alpha x)^{2/3} + (\beta z)^{2/3} = (\alpha^2 - \beta^2)^{2/3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11),$$

wo

$$\alpha = \sqrt{a^2 - b^2} \operatorname{tg} \delta\, \sigma, \quad \beta = b\sigma, \quad \sigma = \frac{a^2 \operatorname{tg} \delta}{(a^2 - b^2) \operatorname{tg}^2 \delta - b^2} \quad . \quad . \quad (13\,\mathbf{a, b, c})$$

und

$$(\alpha_1 z)^{2/3} - (\beta_1 y)^{2/3} = (\alpha_1{}^2 + \beta_1{}^2)^{2/3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12),$$

wo

$$\alpha_1 = a\sigma_1, \quad \beta_1 = \sqrt{a^2 - b^2} \operatorname{tg} \delta\, \sigma_1, \quad \sigma_1 = \frac{b^2 \operatorname{tg} \delta}{(a^2 - b^2) \operatorname{tg}^2 \delta + a^2} \quad . \quad (14\,\mathbf{a, b, c})$$

ist, d. h. die Projektionen der Rückkehrkante auf die (x, z)- bezw. (y, z)-Ebenen sind ebenfalls Evoluten einer Ellipse mit den Halbachsen α, β bezw. einer Hyperbel mit den Halbachsen α_1, β_1. (Der reelle Kurvenzug der Rückkehrkante ergibt aber jedesmal nur einen Teil dieser Projektionen, vergl. später die Abb. 10 und 11.)

Für $t^2 = \tau$ folgt ferner aus den Gleichungen (10 a, b, c)

$$x^2 = \frac{a^4}{a^2 - b^2}\,(1 - b^2\tau)^3, \quad y^2 = \frac{b^4}{a^2 - b^2}\,(a^2\tau - 1)^3, \quad z^2 \operatorname{ctg}^2 \delta = a^4 b^4 \tau^3 \quad (10'\,\mathbf{a, b, c}).$$

Hieraus ergibt sich:

$$x^2 + y^2 - z^2 \operatorname{ctg}^2 \delta - (a^2 + b^2) = - 3\,a^2b^2\tau,$$
$$b^2x^2 + a^2y^2 - (a^2 + b^2) \operatorname{ctg}^2 \delta\, z^2 - a^2b^2 = - a^4b^4\tau^2$$

---

[1]) Wegen dieser Gleichungen vergl. z. B. H. v. Mangoldt, Einführung in die höhere Mathematik, Bd. II, 2. Aufl., Leipzig 1919, S. 446 ff.

und durch Elimination von τ aus beiden Gleichungen

$$(x^2+y^2-z^2\operatorname{ctg}^2\delta-(a^2+b^2))^2+3\,(b^2x^2+a^2y^2-(a^2+b^2)\operatorname{ctg}^2\delta\,z^2-a^2b^2)=0 \quad (15),$$

d. h. die Rückkehrkante liegt auch auf der durch die letzte Gleichung bestimmten Fläche 4. Ordnung.

Wir wollen uns nun fragen, von welcher Ordnung eigentlich diese Rückkehrkante ist. Jede der beiden Koordinatenebenen $x=0$ und $y=0$ schneidet ja die Raumkurve reell in vier Spitzen und enthält auch die Tangenten der Spitzen, so daß jede Spitze als Schnittpunkt wenigstens dreifach zählt. Die Raumkurve ist also wenigstens von der 12. Ordnung. Wir denken nun die Raumkurve mit den Gleichungen (10'a, b, c) allgemeiner durch die (zu den drei Koordinatenebenen symmetrisch liegenden) vier Ebenen durch den Koordinatenanfangspunkt:

$$x\pm y\pm z=0 \text{ (oder allgemeiner } Ax\pm By\pm Cz=0)$$

geschnitten. Diese vier Ebenen sind durch die eine Gleichung 4. Grades:

$$(x+y+z)\,(x+y-z)\,(x-y+z)\,(x-y-z)=0$$

oder

$$(x^2+y^2-z^2)^2-4\,x^2y^2=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

dargestellt. Setzen wir in diese Gleichung die Werte für x^2, y^2, z^2 nach den Gleichungen (10'a, b, c) ein, so ergibt sich eine Gleichung 6. Grades für τ. Zu jedem Wurzelwerte τ_i dieser Gleichung gehören aber nach den Gleichungen (10'a, b, c) acht (zu den Koordinatenebenen symmetrisch gelegene) Schnittpunkte (x, y, z). Also erhalten wir für jede der vier Schnittebenen zwölf Schnittpunkte, d. h. die Rückkehrkante ist von der 12. Ordnung[1]).

4. Die Horizontalschnitte der Böschungsfläche. Gleichung der Böschungsfläche ohne Parameter. Wir wollen uns der näheren Betrachtung der Horizontalschnitte der Böschungsfläche zuwenden, die ja auf die (x, y)-Ebene projiziert die Aequidistanten der Basisellipse ergeben. Wir werden damit zugleich die Frage beantworten, von welcher Ordnung unsere Fläche ist[2]). Abb. 7 gibt außer der Basisellipse und ihrer Evolute (vergl. die Abb. 5 und 6) vier Aequidistanten, den Horizontalschnitten der Fläche entsprechend, wieder. Die beiden Zweige jeder Aequidistante tragen dieselbe Ziffer I bis IV (vergl. auch die Abb. des Modelles). Denken wir zu den Projektionen der in gleichen Abständen ausgeführten Horizontalschnitte der Böschungsfläche, also zu den Aequidistanten der Ellipse, die z-Koordinate als Höhenziffer oder »Kote« hinzugeschrieben, so erhalten wir in der (x, y)-Ebene die »kotierte Projektion« der Böschungsfläche, die den geodätischen Karten eines Geländes mit den Höhenkurven darauf vergleichbar ist; die Fallinien unseres Geländes (Böschungslinien) sind dabei die geradlinigen Er-

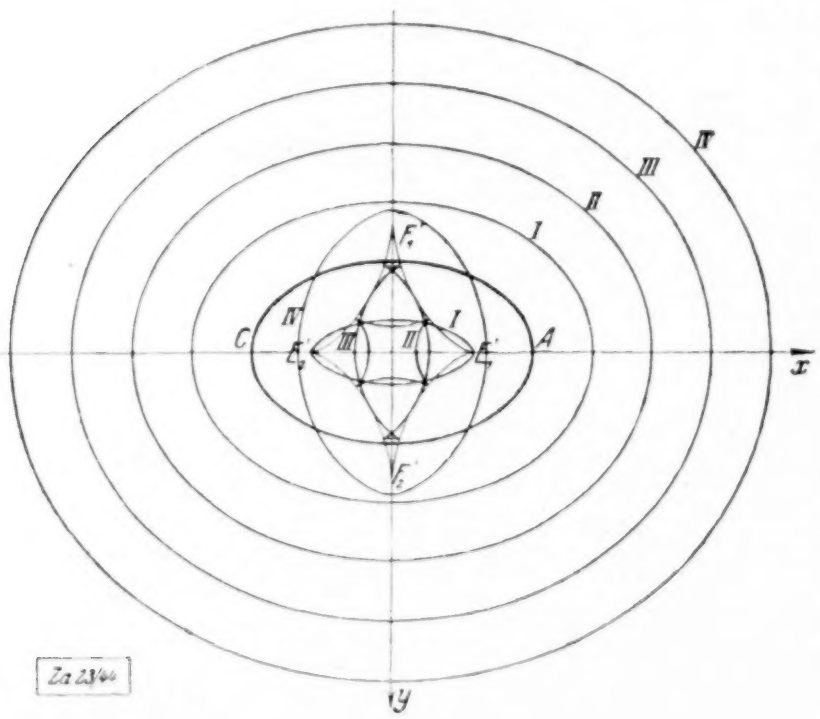


Abb. 7

[1]) Vergl. auch den Schnitt der Raumkurve mit der Ebene $z=0$; für $z=0$ ergibt sich dreifach zählend $\tau=0$ und dazu je die vier Punkte

$$x=\pm\frac{a^2}{\sqrt{a^2-b^2}}, \qquad y=\pm\frac{b^2}{\sqrt{a^2-b^2}}\,i.$$

Da die Raumkurve sich ja auch z. B. als Schnitt des Zylinders 6. Ordnung mit der Gleichung (8') und der Fläche 4. Ordnung (15) ergibt, so muß also der vollständige Schnitt dieser Flächen, der von der 24. Ordnung ist, in unsere Rückkehrkante und noch eine andere Raumkurve 12. Ordnung zerfallen. Diese Verhältnisse sind analog dem Zerfallen der Schnittkurve 4. Ordnung für die beiden Kreiszylinder $x^2+y^2=r^2$ und $y^2+z^2=r^2$ in zwei Ellipsen, also zwei Kurven 2. Ordnung.

[2]) Die Aequidistanten einer Ellipse sind z. B. sehr übersichtlich behandelt mit Angabe der Literatur bei G. Loria, Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven, Leipzig 1902, S. 645 bis 649.

zeugenden der Böschungsfläche und in der kotierten Projektion die gemeinsamen Normalen der Aequidistanten. Wir wollen nur noch bemerken: Der geometrische Ort für die Spitzen der Horizontalschnitte ist die Rückkehrkante der Böschungsfläche.

Bei G. Loria finden wir die folgenden Gleichungen mit dem Parameter λ für die Aequidistanten der Ellipse angegeben (l. c. S. 647):

$$x = \frac{\lambda + a^2}{\lambda}\sqrt{\frac{\lambda^2 - b^2c^2}{a^2 - b^2}}, \qquad y = \frac{\lambda + b^2}{\lambda}\sqrt{\frac{a^2c^2 - \lambda^2}{a^2 - b^2}} \quad . \quad . \quad . \quad (17\,\text{a, b}),$$

wo c den zu den Aequidistanten gehörenden Abstand von der Ellipse bedeutet. Diese Gleichungen ergeben sich aus unseren Flächengleichungen (7 a, b, c), wenn wir aus der Gleichung (7 c) $s = \frac{z}{\sqrt{1-\nu^2}}$ in die beiden ersten substituieren und dann noch $z\frac{\nu}{\sqrt{1-\nu^2}} = z\,\operatorname{ctg}\delta = c$ (gleich s' nach unserer Bezeichnung S. 200) und $t = \frac{c}{\lambda}$ setzen.

Bei G. Loria (l. c. S. 646) finden wir sogleich auch die durch Elimination von λ aus den Gleichungen (17 a, b) sich ergebende Gleichung, die zuerst von Catalan und Caylay aufgestellt wurde[1]). Setzen wir in diese Gleichung $c = z\,\operatorname{ctg}\delta$, so erhalten wir unmittelbar die allerdings recht lange Gleichung unserer Böschungsfläche ohne Parameter:

$$\left.\begin{aligned}&(x^2 + y^2 - \operatorname{ctg}^2\delta\, z^2 - a^2 - b^2)^2 (b^2x^2 + a^2y^2 - (a^2 + b^2)\operatorname{ctg}^2\delta\, z^2 - a^2b^2)^2\\ &+ 4a^3b^2\operatorname{ctg}^2\delta\, z^2 (x^2 + y^2 - \operatorname{ctg}^2\delta\, z^2 - a^2 - b^2)^3 - 27\,a^4b^4\operatorname{ctg}^4\delta\, z^4\\ &+ 18a^2b^3\operatorname{ctg}^2\delta z^2(x^2 + y^2 - \operatorname{ctg}^2\delta z^2 - a^2 - b^2)(b^2x^2 + a^2y^2 - (a^2 + b^2)\operatorname{ctg}^2\delta z^2 - a^2b^2)\\ &+ 4(b^2x^2 + a^2y^2 - (a^2 + b^2)\operatorname{ctg}^2\delta\, z^2 - a^2b^2)^3 = 0\end{aligned}\right\} \quad (18)$$

oder

$$U^2V^2 + 4a^2b^2\operatorname{ctg}^2\delta\, z^2U^3 - 27a^4b^4\operatorname{ctg}^4\delta\, z^4 + 18a^2b^2\operatorname{ctg}^2\delta\, z^2UV + 4V^3 = 0 \quad (18'),$$

wo $U = x^2 + y^2 - \operatorname{ctg}^2\delta\, z^2 - a^2b^2$, $V = b^2x^2 + a^2y^2 - (a^2 + b^2)\operatorname{ctg}^2\delta\, z^2 - a^2b^2$ ist[2]) (vgl. die Gl. (15) in der Form $U^2 + 3V = 0$). Unsere Böschungsfläche ist also (wie jede Aequidistante der Ellipse) von der 8. Ordnung.

Man könnte sich nun darüber wundern, daß wir doch als Schnitt der Fläche mit der Ebene $z = 0$ allein die doppelt zählende Basisellipse (vgl. Satz 2, S. 198) kennen, was uns erst zur 4. Ordnung führen würde. Die Gl. (18) ergibt nun für $z = 0$:

$$(x^2 + y^2 - a^2 - b^2)^2 (b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2)^2 + 4(b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2)^3 = 0$$

und

$$(x^2 + y^2 - a^2 - b^2)^2 + 4(b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2) = 0$$

oder

$$(x^2 + y^2)^2 - 2x^2(a^2 - b^2) + 2y^2(a^2 - b^2) + (a^2 - b^2)^2 = 0$$

oder, da die linke Seite sich zunächst in zwei Faktoren zerlegen läßt:

$$(x \mp \sqrt{a^2 - b^2})^2 + y^2 = 0$$

und bei weiterer Zerlegung:

$$x - \sqrt{a^2 - b^2} = \pm y\,i \quad . \quad (19\,\text{a, b}), \qquad x + \sqrt{a^2 - b^2} = \pm y\,i \quad . \quad (20\,\text{a, b}).$$

Diese beiden Gleichungspaare sind reell nur durch den einen oder anderen Brennpunkt G, H (siehe Abb. 5 und Abb. 10) der Basisellipse (21 a, b) $x = \pm\sqrt{a^2 - b^2}$, $y = 0$ befriedigt. (Der erste Brennpunkt z. B. ergibt sich auch aus den Gleichungen (7 a, b, c) S. 200 für $s = t = 0$ und $\lim \frac{s}{t} = -\frac{b^2}{\nu}$). Jedes Gleichungspaar stellt vollständig die beiden durch den betreffenden Brennpunkt gehenden »Minimalgeraden« dar. Die Schnittkurve 8. Ordnung der Böschungsfläche mit der z-Ebene zerfällt in die doppelt zählende Basisellipse und die zwei Paare von Minimalgeraden durch deren Brennpunkte G, H. Wir werden dieses Resultat im weiteren Verlauf der Untersuchung noch von höherem Standpunkt aus betrachten.

5. Die Gleichungen der Böschungsfläche in Ebenenkoordinaten. Die ∞^1 Tangentialebenen der einzelnen Böschungsfläche berühren, wie wir gesehen haben, sowohl die Basisellipse in der x, y-Ebene, wie auch den unendlich fernen Kegelschnitt des Richtungskegels. Dieser Gedanke führt uns dazu, die Gleichungen unserer Böschungs-

---

[1]) Sur la courbe parallele a l'éllipse, Ann. di Matem. XIII, 1860.

[2]) Die Bemerkung des Herrn Ackermann l. c. S. 7: Eine Elimination beider Parameter ist nicht möglich, ist also nicht richtig.

fläche in »Ebenenkoordinaten« aufzustellen. Als Koordinaten u, v, w einer beliebigen Ebene seien die negativen reziproken Werte ihrer Abschnitte auf den drei Koordinatenachsen bezeichnet. Die Tangente in einem Punkte (x_0, y_0) der Basisellipse (1) hat die Achsenabschnitte a^2/x_0 und b^2/y_0. Folglich hat jede beliebige durch die Tangente gehende Ebene die Koordinaten (22a, b) $u = -\frac{x_0}{a^2}$, $v = -\frac{y_0}{b^2}$. Sie stellen zugleich die analog definierten »Linienkoordinaten« der Tangente in der (x, y)-Ebene dar. Nun gilt für das Lot l vom Koordinatenanfang auf die Tangente

$$l = \frac{1}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}}}.$$

Die beiden unter dem Winkel δ geneigten (d. h. den ∞ fernen Kegelschnitt berührenden) Ebenen durch die Tangente ergeben also auf der z-Achse die Achsenabschnitte $\pm l \operatorname{tg} \delta$. Es ist also die dritte Ebenenkoordinate dieser Ebenen:

$$w = \pm \frac{1}{\operatorname{tg} \delta} \sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23).$$

Eliminieren wir aus den 4 Gleichungen (21) bis (23) die Größen x_0, y_0, so ergibt sich endlich:

$$a^2 u^2 + b^2 v^2 = 1, \quad u^2 + v^2 - \operatorname{tg}^2 \delta \, w^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24\,\text{a, b}).$$

Die Gleichung (24a) stellt, in der (x, y)-Ebene gedeutet, die Gleichung der Basisellipse in Linienkoordinaten dar und, im Raume gedeutet, die Gleichung des ausgearteten Ellipsoids mit den Halbachsen a, b, 0 in Ebenenkoordinaten. Die homogene Gleichung (24b) dagegen stellt analog den ∞ fernen Kegelschnitt dar. (Dieser wird auch in homogenen Punktkoordinaten x, y, z, ω durch die Gleichungen:

$$x^2 + y^2 - cot^2 \delta \, z^2 = 0, \quad \omega = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25\,\text{a, b})$$

gegeben.) Beide Gleichungen (24a, b) zusammen ergeben die gesuchte Darstellung unserer Böschungsfläche durch ihre Gleichungen in Ebenenkoordinaten. Unsere Böschungsfläche ist also von der 4. Klasse (ebenso wie eine Aequidistante der Basisellipse), d. h. durch jeden Punkt des Raumes gehen 4 Tangentialebenen der Fläche.

6. Uebertragung der Betrachtungen in das duale Gebiet. Wir wollen jetzt unsere Betrachtungen auf das duale Gebiet übertragen. Zu diesem Zwecke ordnen wir einfach in demselben Koordinatensystem jeder Ebene mit den Koordinaten u, v, w den Punkt mit den Koordinaten ξ, η, ζ zu durch die Beziehung

$$\xi = -u, \quad \eta = -v, \quad \zeta = -w \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26\,\text{a, b, c}).$$

Diese Beziehung stellt nichts anderes dar als die Polarenverwandtschaft in bezug auf die Einheitskugel $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$, d. h. jeder Ebene (u, v, w) wird auf ihrem Lote vom Koordinatenanfangspunkt der vierte harmonische Punkt (ξ, η, ζ) zu dem Lotfußpunkt und den beiden Schnittpunkten des Lotes mit der Kugel zugeordnet. (Das Lot vom Koordinatenanfangspunkt auf die Ebene (u, v, w) ist eben gleich $\frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}$). Diese polare Transformation hat natürlich auch die Gleichungen:

$$x = -\Phi, \quad y = -\Psi, \quad z = -X \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26'\,\text{a, b, c})$$

zur Folge, wo Φ, Ψ, X die Ebenenkoordinaten des (ξ, η, ζ)-Raumes bedeuten. Durch die Transformation (26a, b, c) gehen nun die Gleichungen (24a, b) über in:

$$a^2 \xi^2 + b^2 \eta^2 = 1, \quad \xi^2 + \eta^2 - \operatorname{tg}^2 \delta \, \zeta^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27\,\text{a, b}).$$

Die Gleichung (27a) stellt einen elliptischen Zylinder um die ζ- oder z-Achse dar, dessen Grundellipse in der (x, y)-Ebene die Halbachsen $1/a$ und $1/b$ $(a > b)$ besitzt, und die Gleichung (27b) einen Rotationskegel, dessen Erzeugende mit der z-Achse den Winkel δ bilden. Diese beiden Gleichungen zusammen aber ergeben eine Raumkurve 4. Ordnung als Schnitt des elliptischen Zylinders mit dem Rotationskegel. Diese einfache Raumkurve ist in der Abb. 8 in Grund-, Auf- und Seitenriß und in Abb. 9 in Kavalierperspektive dargestellt; der Punkt O ist hier der Koordinatenanfangspunkt.

Aus dieser Raumkurve 4. Ordnung entsteht also unsere Böschungsfläche als Gebilde von ∞^1 Tangentialebenen, wenn wir punktweise die

Raumkurve durch die Polarenverwandtschaft (26a, b, c) in den anderen Raum übertragen[1]).

Den Tangenten der Raumkurve 4. Ordnung entsprechen hierbei die Erzeugenden der Böschungsfläche (oder die Tangenten ihrer Rückkehrkurve) und der Gesamtheit der Oskulationsebenen der Raumkurve (27a, b, c) die als Punktgebilde aufgefaßte Rückkehrkante der Böschungsfläche.

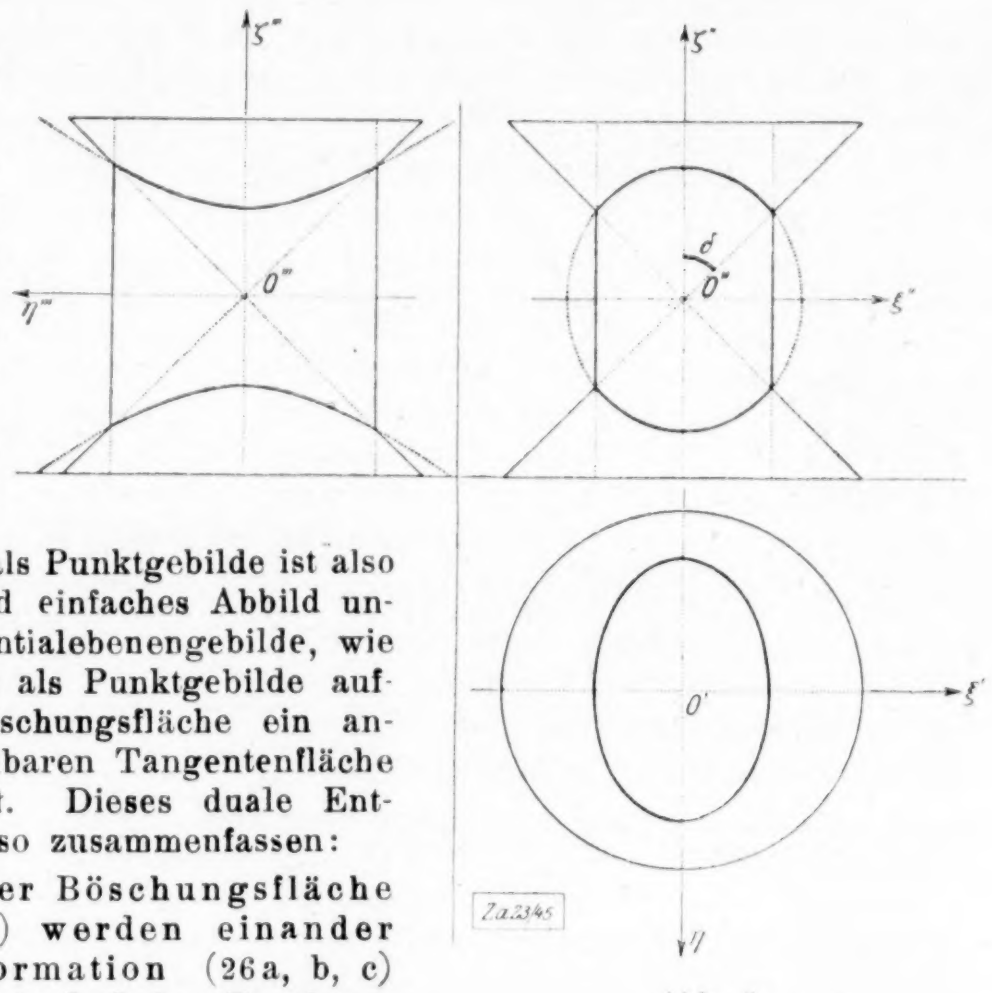


Abb. 8

Die Raumkurve (27a, b) als Punktgebilde ist also ein besonders anschauliches und einfaches Abbild unserer Böschungsfläche als Tangentialebenengebilde, wie andererseits natürlich auch die als Punktgebilde aufgefaßte Rückkehrkante der Böschungsfläche ein anschauliches Abbild der abwickelbaren Tangentenfläche der Raumkurve 4. Ordnung ist. Dieses duale Entsprechen können wir also kurz so zusammenfassen:

Die Rückkehrkante der Böschungsfläche und die Raumkurve (27a, b) werden einander durch die polare Transformation (26a, b, c) bezw. (26'a, b, c) so zugeordnet, daß den Punkten der einen Kurve die Oskulationsebenen der anderen und den Tangenten der einen die Tangenten der anderen Kurve entsprechen. Hierbei ist also jede der beiden Kurven als »Träger« ihrer Punkte, Oskulationsebenen und Tangenten aufgefaßt.

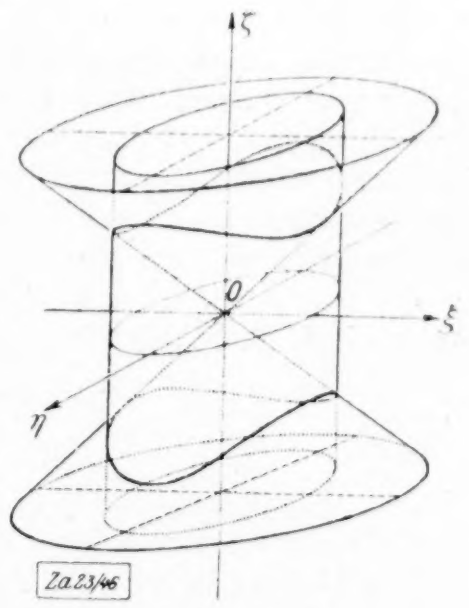


Abb. 9

Es sei nun auf folgende allgemeine Definition hingewiesen: Unter dem Range einer Raumkurve versteht man die Anzahl der Ebenen, welche durch eine feste beliebige Gerade des Raumes und durch eine der Tangenten der Raumkurve hindurchgehen (oder anders ausgedrückt die Anzahl der Tangenten, welche eine feste Gerade des Raumes schneiden). Ersichtlich ist der Rang jeder Raumkurve hiernach stets gleich der Ordnung der zugehörigen abwickelbaren Fläche. Wir gewinnen somit in Hinblick auf unsere bisherigen Entwicklungen folgende übersichtliche Zusammenstellung:

Rückkehrkante (10a, b, c):		Raumkurve (27a, b):	
Rang der Rückkehrkante oder Ordnung ihrer abwickelbaren Fläche, der Böschungsfläche	=	Rang der Raumkurve oder Ordnung ihrer abwickelbaren Tangentenfläche	= 8 (vgl. Satz S. 203)
Klasse der Böschungsfläche	=	Ordnung der Raumkurve	= 4 (vgl. Satz S. 204)
Ordnung der Rückkehrkante	=	Klasse der abwickelbaren Tangentenfläche	= 12[2]) (vgl. Satz S. 202)

Aus dieser Zusammenstellung können wir z. B. folgende einander dual entsprechenden Sätze entnehmen:

[1]) Im Hinblick auf die Verallgemeinerung dieser dualen Uebertragung sei nur hervorgehoben, daß die Gesamtheit aller überhaupt möglichen Böschungsflächen dual der Gesamtheit der Kurven auf dem Kegel (27b) entspricht.

[2]) Wegen dieser von uns sehr einfach gewonnenen Ziffern vgl. z. B. Salmon-Fiedler, Analytische Geometrie des Raumes, II. Teil, Leipzig 1880, S. 133, Art. 100 u. S. 105, Art. 88.

fläche in »Ebenenkoordinaten« aufzustellen. Als Koordinaten u, v, w einer beliebigen Ebene seien die negativen reziproken Werte ihrer Abschnitte auf den drei Koordinatenachsen bezeichnet. Die Tangente in einem Punkte (x_0, y_0) der Basisellipse (1) hat die Achsenabschnitte a^2/x_0 und b^2/y_0. Folglich hat jede beliebige durch die Tangente gehende Ebene die Koordinaten (22a, b) $u = -\frac{x_0}{a^2}$, $v = -\frac{y_0}{b^2}$. Sie stellen zugleich die analog definierten »Linienkoordinaten« der Tangente in der (x, y)-Ebene dar. Nun gilt für das Lot l vom Koordinatenanfang auf die Tangente

$$l = \frac{1}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}}}.$$

Die beiden unter dem Winkel δ geneigten (d. h. den ∞ fernen Kegelschnitt berührenden) Ebenen durch die Tangente ergeben also auf der z-Achse die Achsenabschnitte $\pm l \operatorname{tg} \delta$. Es ist also die dritte Ebenenkoordinate dieser Ebenen:

$$w = \pm \frac{1}{\operatorname{tg} \delta} \sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23).$$

Eliminieren wir aus den 4 Gleichungen (21) bis (23) die Größen x_0, y_0, so ergibt sich endlich:

$$a^2 u^2 + b^2 v^2 = 1, \quad u^2 + v^2 - \operatorname{tg}^2 \delta \, w^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24\,\text{a, b}).$$

Die Gleichung (24a) stellt, in der (x, y)-Ebene gedeutet, die Gleichung der Basisellipse in Linienkoordinaten dar und, im Raume gedeutet, die Gleichung des ausgearteten Ellipsoids mit den Halbachsen a, b, 0 in Ebenenkoordinaten. Die homogene Gleichung (24b) dagegen stellt analog den ∞ fernen Kegelschnitt dar. (Dieser wird auch in homogenen Punktkoordinaten x, y, z, ω durch die Gleichungen:

$$x^2 + y^2 - cot^2 \delta \, z^2 = 0, \quad \omega = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25\,\text{a, b})$$

gegeben.) Beide Gleichungen (24a, b) zusammen ergeben die gesuchte Darstellung unserer Böschungsfläche durch ihre Gleichungen in Ebenenkoordinaten. Unsere Böschungsfläche ist also von der 4. Klasse (ebenso wie eine Aequidistante der Basisellipse), d. h. durch jeden Punkt des Raumes gehen 4 Tangentialebenen der Fläche.

6. Uebertragung der Betrachtungen in das duale Gebiet. Wir wollen jetzt unsere Betrachtungen auf das duale Gebiet übertragen. Zu diesem Zwecke ordnen wir einfach in demselben Koordinatensystem jeder Ebene mit den Koordinaten u, v, w den Punkt mit den Koordinaten ξ, η, ζ zu durch die Beziehung

$$\xi = -u, \quad \eta = -v, \quad \zeta = -w \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26\,\text{a, b, c}).$$

Diese Beziehung stellt nichts anderes dar als die Polarenverwandtschaft in bezug auf die Einheitskugel $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$, d. h. jeder Ebene (u, v, w) wird auf ihrem Lote vom Koordinatenanfangspunkt der vierte harmonische Punkt (ξ, η, ζ) zu dem Lotfußpunkt und den beiden Schnittpunkten des Lotes mit der Kugel zugeordnet. (Das Lot vom Koordinatenanfangspunkt auf die Ebene (u, v, w) ist eben gleich $\frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}$). Diese polare Transformation hat natürlich auch die Gleichungen:

$$x = -\Phi, \quad y = -\Psi, \quad z = -X \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26'\,\text{a, b, c})$$

zur Folge, wo Φ, Ψ, X die Ebenenkoordinaten des (ξ, η, ζ)-Raumes bedeuten. Durch die Transformation (26a, b, c) gehen nun die Gleichungen (24a, b) über in:

$$a^2 \xi^2 + b^2 \eta^2 = 1, \quad \xi^2 + \eta^2 - \operatorname{tg}^2 \delta \, \zeta^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27\,\text{a, b}).$$

Die Gleichung (27a) stellt einen elliptischen Zylinder um die ζ- oder z-Achse dar, dessen Grundellipse in der (x, y)-Ebene die Halbachsen $1/a$ und $1/b$ $(a > b)$ besitzt, und die Gleichung (27b) einen Rotationskegel, dessen Erzeugende mit der z-Achse den Winkel δ bilden. Diese beiden Gleichungen zusammen aber ergeben eine Raumkurve 4. Ordnung als Schnitt des elliptischen Zylinders mit dem Rotationskegel. Diese einfache Raumkurve ist in der Abb. 8 in Grund-, Auf- und Seitenriß und in Abb. 9 in Kavalierperspektive dargestellt; der Punkt O ist hier der Koordinatenanfangspunkt.

Aus dieser Raumkurve 4. Ordnung entsteht also unsere Böschungsfläche als Gebilde von ∞^1 Tangentialebenen, wenn wir punktweise die

Raumkurve durch die Polarenverwandtschaft (26a, b, c) in den anderen Raum übertragen[1]).

Den Tangenten der Raumkurve 4. Ordnung entsprechen hierbei die Erzeugenden der Böschungsfläche (oder die Tangenten ihrer Rückkehrkurve) und der Gesamtheit der Oskulationsebenen der Raumkurve (27a, b, c) die als Punktgebilde aufgefaßte Rückkehrkante der Böschungsfläche.

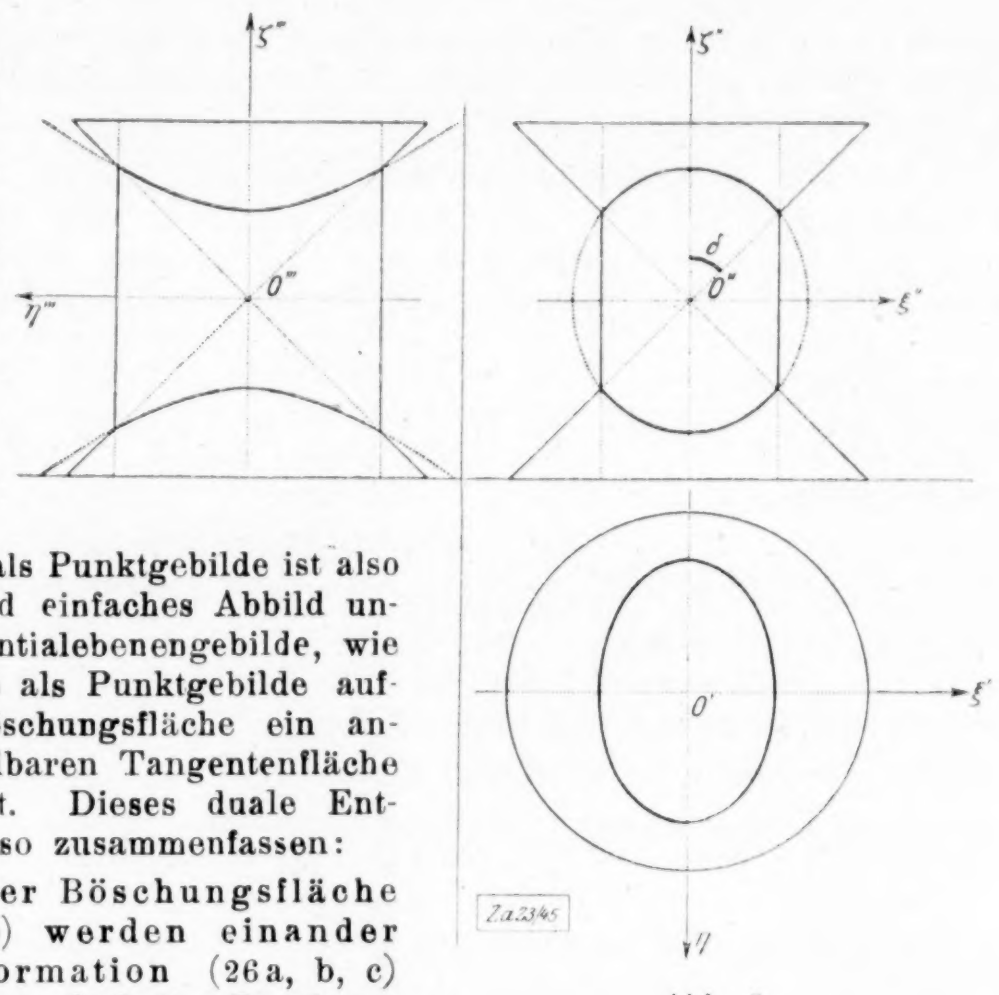


Abb. 8

Die Raumkurve (27a, b) als Punktgebilde ist also ein besonders anschauliches und einfaches Abbild unserer Böschungsfläche als Tangentialebenengebilde, wie andererseits natürlich auch die als Punktgebilde aufgefaßte Rückkehrkante der Böschungsfläche ein anschauliches Abbild der abwickelbaren Tangentenfläche der Raumkurve 4. Ordnung ist. Dieses duale Entsprechen können wir also kurz so zusammenfassen:

Die Rückkehrkante der Böschungsfläche und die Raumkurve (27a, b) werden einander durch die polare Transformation (26a, b, c) bezw. (26'a, b, c) so zugeordnet, daß den Punkten der einen Kurve die Oskulationsebenen der anderen und den Tangenten der einen die Tangenten der anderen Kurve entsprechen. Hierbei ist also jede der beiden Kurven als »Träger« ihrer Punkte, Oskulationsebenen und Tangenten aufgefaßt.

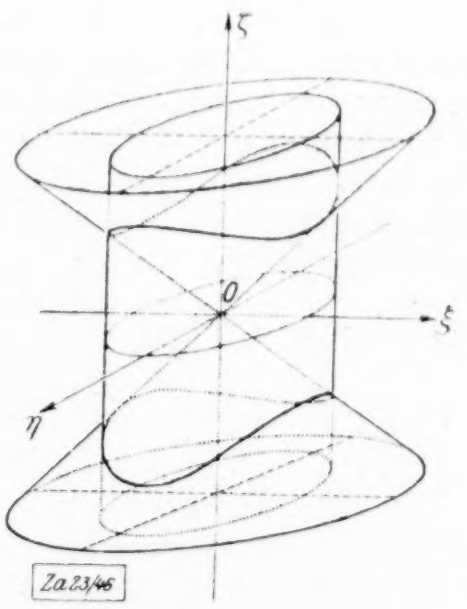


Abb. 9

Es sei nun auf folgende allgemeine Definition hingewiesen: Unter dem Range einer Raumkurve versteht man die Anzahl der Ebenen, welche durch eine feste beliebige Gerade des Raumes und durch eine der Tangenten der Raumkurve hindurchgehen (oder anders ausgedrückt die Anzahl der Tangenten, welche eine feste Gerade des Raumes schneiden). Ersichtlich ist der Rang jeder Raumkurve hiernach stets gleich der Ordnung der zugehörigen abwickelbaren Fläche. Wir gewinnen somit in Hinblick auf unsere bisherigen Entwicklungen folgende übersichtliche Zusammenstellung:

Rückkehrkante (10a, b, c):		Raumkurve (27a, b):	
Rang der Rückkehrkante oder Ordnung ihrer abwickelbaren Fläche, der Böschungsfläche	=	Rang der Raumkurve oder Ordnung ihrer abwickelbaren Tangentenfläche	= 8 (vgl. Satz S. 203)
Klasse der Böschungsfläche	=	Ordnung der Raumkurve	= 4 (vgl. Satz S. 204)
Ordnung der Rückkehrkante	=	Klasse der abwickelbaren Tangentenfläche	= 12[2]) (vgl. Satz S. 202)

Aus dieser Zusammenstellung können wir z. B. folgende einander dual entsprechenden Sätze entnehmen:

[1]) Im Hinblick auf die Verallgemeinerung dieser dualen Uebertragung sei nur hervorgehoben, daß die Gesamtheit aller überhaupt möglichen Böschungsflächen dual der Gesamtheit der Kurven auf dem Kegel (27b) entspricht.

[2]) Wegen dieser von uns sehr einfach gewonnenen Ziffern vgl. z. B. Salmon-Fiedler, Analytische Geometrie des Raumes, II. Teil, Leipzig 1880, S. 133, Art. 100 u. S. 105, Art. 88.

Die Böschungsfläche wird von einer beliebigen Ebene in einer Kurve 8. Ordnung und 4. Klasse geschnitten; die Raumkurve (27a, b) wird von einem beliebigen Raumpunkte durch einen Kegel 4. Ordnung und 8. Klasse projiziert.

7. Die Doppelkurven der Böschungsfläche. Durch jede Raumkurve 4. Ordnung 1. Art (d. h. jede Raumkurve, die als Schnitt zweier Flächen zweiten Grades entsteht) gehen stets 4 Kegel (oder Zylinder). (Jede Erzeugende eines solchen Kegels schneidet die Raumkurve in 2 Punkten, was für das Folgende wichtig ist.) In unserem Falle sind diese 4 Kegel oder Zylinder die beiden durch die Gleichungen (27a, b) S. 204 bestimmten und außerdem die beiden Zylinder, welche die Raumkurve auf die Auf- und Seitenrißebene projizieren und deren Grundkurven in Abb. 8 dargestellt sind. Die Gleichungen dieser letzten beiden Zylinder ergeben sich einfach durch Elimination von η bezw. ζ aus den Gleichungen (27a, b):

$$\left.\begin{aligned}(a^2-b^2)\,\xi^2+b^2\,\mathrm{tg}^2\,\delta\,\zeta^2&=1\ \text{(elliptischer Zylinder)}\\ a^2\,\mathrm{tg}^2\,\delta\,\zeta^2-(a^2-b^2)\,\eta^2&=1\ \text{(hyperbolischer Zylinder)}\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ (27\,\mathrm{c,\ d}).$$

Analog besitzt die Böschungsfläche außer den Doppelkegelschnitten (24a, b) d. h. der Basisellipse in der (x, y)-Ebene und dem ∞ fernen Kegelschnitt noch die beiden Doppelkegelschnitte mit den Gleichungen in Linienkoordinaten:

$$(a^2-b^2)\,u^2+b^2\,\mathrm{tg}^2\,\delta\,w^2=1,\qquad a^2\,\mathrm{tg}^2\,\delta\,w^2-(a^2-b^2)\,v^2=1\quad .\ (24\,\mathrm{c,\ d}),$$

oder mit den Gleichungen in Punktkoordinaten:

$$\frac{x^2}{a^2-b^2}+\frac{z^2}{b^2\,\mathrm{tg}^2\delta}=1,\qquad \frac{z^2}{a^2\,\mathrm{tg}^2\delta}-\frac{y^2}{a^2-b^2}=1\quad\ldots\ (28\,\mathrm{a,\ b})$$

(vgl. analog die Gl. (1) S. 199 und (24a) S. 204), d. h. eine Ellipse in der (x, z)-Ebene und eine Hyperbel in der (y, z)-Ebene. In den Abb. 10 und 11 sind diese beiden Kegelschnitte dargestellt zugleich mit den vier Erzeugenden der Böschungsfläche in der (x, z)- bezw. (y, z)-Ebene und der Projektion der Rückkehrkante. Letztere berührt die Ellipse bezw. Hyperbel in den Punkten E_i bezw. F_i. Soweit die Kegelschnitte nicht ausgezogen sind, verlaufen sie als isolierte Doppelkurven der Böschungsfläche. (Die Punkte der isolierten Doppelkurven entsprechen dual denjenigen Tangentialebenen der zum Aufriß bezw. Seitenriß senkrechten Zylinder (27c, d) der Abb. 9 S. 205, welche die Raumkurve (27a, b) in konjugiert imaginären Punkten berühren.) Dementsprechend gehören ferner, wie auch unmittelbar anschaulich klar ist, zu dem reellen Schnitt der (x, z)- und (y, z)-Koordinatenebenen mit der Böschungsfläche noch bezw. die Punkte L, M bezw. J, K der Abb. 10 und 11 hinzu (vgl. den Satz S. 203) Ebenso gehören zu dem

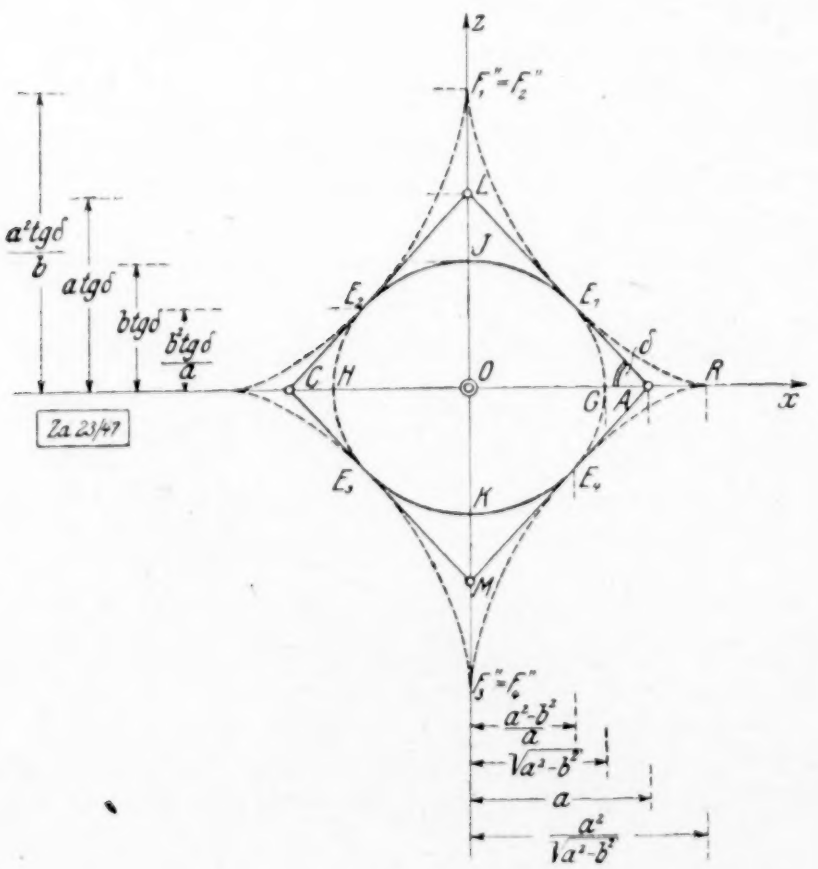


Abb. 10

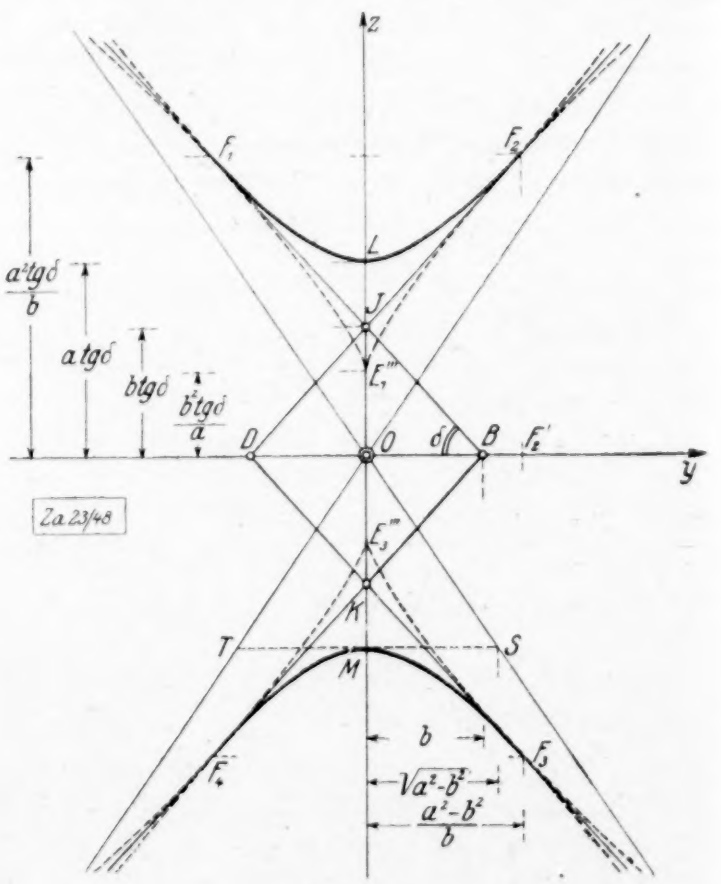


Abb. 11

reellen Schnitt der ∞ fernen Ebene außer dem ∞ fernen Doppelkegelschnitt noch die ∞ fernen Punkte der Hyperbel oder ihrer Asymptoten in Abb. 11.

Diese Resultate sind natürlich auch leicht rechnerisch wieder aus der Gleichung (18) S. 203 zu gewinnen. Es ist interessant zu sehen, wie die in den Abbildungen seitlich beigefügten Maße sofort erkennen lassen: Die Punktquadrupel A, C, R, G und G, H, A, E_1' der x-Achse, L, M, J, F_1'' und J, K, L, E_1'' der z-Achse und S', T', B, F_3' der y-Achse sind harmonisch.

Denken wir nun diese ebenen Abb. 10 und 11 und die früheren räumlichen Abb. 5 und 6 S. 200 miteinander zu einer Abbildung vereinigt, so fallen eben die gleich bezeichneten Punkte (insbesondere z. B. die Punktpaare G, H und J, K und L, M) zusammen. Die Gesamtfigur gewährt dann schon einen anschaulichen Ueberblick über die Gestalt der ganzen aus zwei getrennten Mänteln bestehenden Böschungsfläche, der dann noch durch die Abb. 2 des Modelles vervollständigt sei. Die beiden Mäntel entsprechen den beiden Zweigen der Raumkurve der Abb. 9.

Eine über der Basisellipse aufgehäufte Sandmasse (oder analog auch eine von der Basisellipse aus ausgehobene Sandmasse) unter der Annahme der Konstanz des Böschungswinkels würde natürlich nur von dem Teil des einen Mantels der Böschungsfläche begrenzt sein können, der sich von den Halbellipsen ABC und ADC der Abb. 5 aus bis zu dem Linienzug $AE_1\,JE_2\,C$ der Abb. 10 erstreckt. Es ist interessant, zu vergleichen, wie dieser »ideale Sandhaufen« von dem wirklichen abweicht, wie ihn Herr Auerbach experimentell untersucht hat (vgl. dessen Arbeit, l. c. S. 213 bis 215).

8. Die zur Böschungsfläche zugehörigen Flächen 2. Ordnung. Wir wollen den Vergleich der Böschungsfläche und der Raumkurve (27a, b) noch nach einer anderen Richtung hin fortsetzen, wobei wir zu weiteren interessanten Eigenschaften der Böschungsfläche geführt werden. Durch unsere Raumkurve gehen ∞^1 Flächen 2. Ordnung (mit reeller Gleichung) hindurch; sie werden gegeben durch die aus den Gleichungen (27a, b) S. 204 sich ergebenden Gleichungen mit dem reellen Parameter $\varkappa$:

$$(a^2\xi^2 + b^2\eta^2 - 1) - \varkappa\,(\xi^2 + \eta^2 - \operatorname{tg}^2\delta\,\zeta^2) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29),$$

oder geordnet:

$$(2\,a^2 - \varkappa)\,\xi^2 + (b^2 - \varkappa)\,\eta^2 + \varkappa \operatorname{tg}^2\delta\,\zeta^2 = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29').$$

Analog gilt der Satz: Die Böschungsfläche berührt ∞^1 Flächen 2. Ordnung, mit anderen Worten: Jene ist auch Böschungsfläche für diese Flächen 2. Ordnung. Letztere sind bestimmt durch die aus den Gleichungen (24a, b) S. 204 sich ergebenden Gleichungen in Ebenenkoordinaten:

$$(a^2 - \varkappa)\,u^2 + (b^2 - \varkappa)\,v^2 + \varkappa \operatorname{tg}^2\delta\,w^2 = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

oder durch die entsprechenden Gleichungen in Punktkoordinaten:

$$\frac{x^2}{a^2 - \varkappa} + \frac{y^2}{b^2 - \varkappa} + \frac{z^2}{\varkappa \operatorname{tg}^2\delta} = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31)\,[1].$$

Die letzte Gleichung gestattet nun leicht, die Art der einzelnen Flächen 2. Ordnung genauer anzugeben:

Für $0 < \varkappa < b^2$ stellt die Gleichung (31) Ellipsoide dar (Unterfall II). Für $-\infty < \varkappa < 0$ erweisen sich die Flächen (31) als einschalige Hyperboloide mit der z-Achse als nicht reell schneidender Achse (Unterfall VIII), und zwar ist der Neigungswinkel der einen Asymptote in der (y, z)-Ebene gegen die y-Achse und in der (x, z) Ebene gegen die x-Achse beidemal $< \delta$. Für $\lim \varkappa = 0$ gehen die Ellipsoide (d. h. ihre reellen Flächenteile) in das doppelt zu denkende Innere der Basis-

[1]) Die Ueberführung der einen der Gleichungsformen (30) und (31) in die andere ergibt sich leicht wie folgt: Die Tangentialebene in einem beliebigen Punkte (x_0, y_0, z_0) der Fläche (31) ist gegeben durch die Gleichung:

$$\frac{x x_0}{a^2 - \varkappa} + \frac{y y_0}{b^2 - \varkappa} + \frac{z z_0}{\varkappa \operatorname{tg}^2\delta} = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32);$$

sie hat also die Achsenabschnitte: $\frac{a^2 - \varkappa}{x_0}$, $\frac{b^2 - \varkappa}{y_0}$, $\frac{\varkappa \operatorname{tg}^2\delta}{z_0}$, demnach die Ebenenkoordinaten:

$$u = -\frac{x_0}{a^2 - \varkappa}, \quad v = -\frac{y_0}{b^2 - \varkappa}, \quad w = -\frac{z_0}{\varkappa \operatorname{tg}^2\delta}.$$

Hieraus folgt: $x_0 = -(a^3 - \varkappa)\,u$, $y_0 = -b^2 - \varkappa)\,v$, $z_0 = -\varkappa \operatorname{tg}^2\delta\,w$. Da nun die Koordinaten x_0, y_0, z_0 überdies der Gleichung (31) genügen, so genügen die Koordinaten u, v, w der Gleichung (30).

ellipse und die Hyperboloide (d. h. wieder ihre reellen Flächenteile in das doppelt zu denkende Aeußere der Basisellipse über (Unterfall I). Die Gleichung (31) ergibt für $\lim \varkappa = 0$ die doppelte z-Ebene; doch die Gleichung (30) ergibt in ihr die Basisellipse (vgl. (24a) S. 204) und zwar als Umhüllungsgebilde der ∞^2 »Tangentialebenen«, deren Ebenenkoordinaten u, v, w der Gleichung (24a) genügen. Analoge Verhältnisse werden wiederholt bei anderen Unterfällen im folgenden auftreten, worauf wir dann im einzelnen nicht jedesmal wieder eingehen.

Für $\lim \varkappa = b^2$ gehen die Ellipsoide in das doppelt zu denkende Innere der Ellipse in der (x, z)-Ebene (Unterfall III) über (vgl. deswegen die Gleichungen (24c) und (28a) S. 206 und Abb. 10). Für $b^2 < \varkappa < a^2$ ergibt die Gleichung (31) einschalige Hyperboloide mit der y Achse als nicht reell schneidender Achse (Unterfall IV) und im Gegensatz zu späteren Fällen (vgl. S. 211) ist hier der Neigungswinkel der einen Asymptote in der (y, z)-Ebene gegen die y-Achse größer als δ. (Es ist jedenfalls überraschend, daß als Spur der Böschungsfläche in der (x, y)-Ebene für ein solches Hyperboloid nicht eine Hyperbel, sondern eine Ellipse sich ergibt.) Für $\lim \varkappa = b^2$ gehen diese Hyperboloide in das doppelt zu denkende Aeußere der Ellipse in der (x, z)-Ebene (Unterfall III) über und für $\lim \varkappa = a^2$ in das doppelt zu denkende Aeußere der Hyperbel in der (y, z)-Ebene (Unterfall V, vgl. die Gleichungen (24d) und (28b) und die Abb. 12).

Für $a^2 < \varkappa < +\infty$ sind die Flächen (31) zweischalige Hyperboloide mit reell schneidender z-Achse (Unterfall VI), und zwar ist der Neigungswinkel der einen Asymptote in der (y, z)-Ebene gegen die y-Achse $> \delta$ und in der (x, z)-Ebene gegen die x-Achse ebenfalls $> \delta$. Für $\lim \varkappa = a^2$ gehen diese Hyperboloide in das doppelt zu denkende Innere der Hyperbel in der (y, z)-Ebene über (Unterfall V).

Wollen wir nun noch die Grenzfläche für $\lim \varkappa = \pm \infty$ bestimmen, so müssen wir die Gleichung (31) in homogenen Koordinaten x, y, z, ω schreiben, nämlich:

$$\frac{x^2}{a^2 - \varkappa} + \frac{y^2}{b^2 - \varkappa} + \frac{z^2}{\varkappa \operatorname{tg}^2} = \omega^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31').$$

Für $\lim \varkappa = \infty$ geht die Gleichung (30), wenn wir diese vorher noch durch $\varkappa$ dividieren, über in die Gleichung (24b) S. 204, d. h. in die Gleichung des ∞ fernen Doppelkegelschnitts, und die Gleichung (31') in die Gleichung $\omega^2 = 0$, d. h. in die doppelt zu denkende ∞ ferne Ebene; es gehen also für $\lim \varkappa = +\infty$ bezw. $-\infty$ unsere Flächen 2. Ordnung über in das dopelte Innere bezw. Aeußere des ∞ fernen Doppelkegelschnittes (Unterfall VII).

Die Resultate über die Art der Flächen 2. Ordnung geben wir der besseren Uebersicht wegen noch einmal in folgender Zusammenstellung:

Fall der Basisellipse (a, b).

I.	$\varkappa = 0$	doppelte Basisellipse (24a) S. 204
II.	$0 < \varkappa < b^2$	Ellipsoide
III.	$\varkappa = b^2$	Doppelellipse (24c) S. 206 der (x, z)-Ebene
IV.	$b^2 < \varkappa < a^2$	einschalige Hyperboloide mit nicht reell schneidender y-Achse
V.	$\varkappa = a^2$	Doppelhyperbel (24d) S. 206 der (y, z)-Ebene
VI.	$a^2 < \varkappa < +\infty$	zweischalige Hyperboloide mit reell schneidender z-Achse
VII.	$\varkappa = \infty$	∞ ferner Doppelkegelschnitt (24b) S. 204
VIII.	$-\infty < \varkappa < 0$	einschalige Hyperboloide mit nicht reell schneidender z-Achse

Wir können noch folgenden Satz hinzufügen: Die Schnitte aller dieser Flächen 2. Ordnung mit der (x, y)-Ebene

$$\frac{x^2}{a^2 - \varkappa} + \frac{y^2}{b^2 - \varkappa} = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34)$$

sind konfokale Kegelschnitte.

Wir wollen endlich noch die Berührungskurve der Böschungsfläche mit der einzelnen (nicht ausgearteten) Fläche 2. Ordnung mit der Gleichung (30) oder (31) berechnen. Die Tangentialebene in irgend einem Punkte (x_0, y_0, z_0) der Fläche (31)

ist gegeben durch die Gleichung (32) der Anmerkung S. 207 und die zugehörigen Ebenenkoordinaten durch die Gleichungen (33a, b, c). Nun handelt es sich ja bei der Böschungsfläche um diejenigen Tangentialebenen, deren Ebenenkoordinaten auch der Gleichung (24a) genügen. Setzt man hier für u, v ihre Werte nach den Gleichungen (33a, b) ein, so gilt also für die Berührungspunkte auch die Gleichung:

$$\frac{a^2}{(a^2-\varkappa)^2}x^2+\frac{b^2}{(b^2-\varkappa)^2}y^2=1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35).$$

Die Berührungskurve ist also allgemein eine Raumkurve 4. Ordnung, nämlich der Schnitt der Fläche 2. Ordnung (31) mit dem elliptischen Zylinder (35). Ihre Projektion auf die (x, y)-Ebene ist die durch die Gleichung (35) dargestellte Ellipse.

Vergleichen wir nun für einen bestimmten Wert $\varkappa$ die Basisellipse (1) und die Projektionsellipse (35) mit dem Schnittkegelschnitt (34), deren Halbachsen a, b bezw.

$$a_1=\frac{|a^2-\varkappa|}{a}, \quad b_1=\frac{|b^2-\varkappa|}{b}, \quad a_2=\sqrt{|a^2-\varkappa|}, \quad b_2=\sqrt{|b^2-\varkappa|}$$

sind, so gelten noch die Beziehungen:

$$a\,a_1=a_2^2, \qquad b\,b_1=b_2^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (36a, b)\ ^1),$$

d. h. die Halbachsen a_2, b_2 des Kegelschnittes (34) oder II, der den Schnitt der einzelnen Fläche 2. Ordnung mit der (x, y)-Ebene darstellt, sind bezw. die mittleren geometrischen Proportionalen zu den Halbachsen der Basisellipse I und der Projektion III der Berührungskurve auf die (x, y)-Ebene (Abb. 12 und 13) oder mit anderen Worten: Die Scheitelpunkte der beiden letzten Ellipsen (1) und (35) mit positiver Abszisse (bezw. positiver Ordinate) liegen harmonisch zu den beiden Punkten der x-Achse (bezw. y-Achse), deren Entfernungen vom Koordinatenanfangspunkt die betreffende Halbachse des Kegelschnittes (34) darstellen.

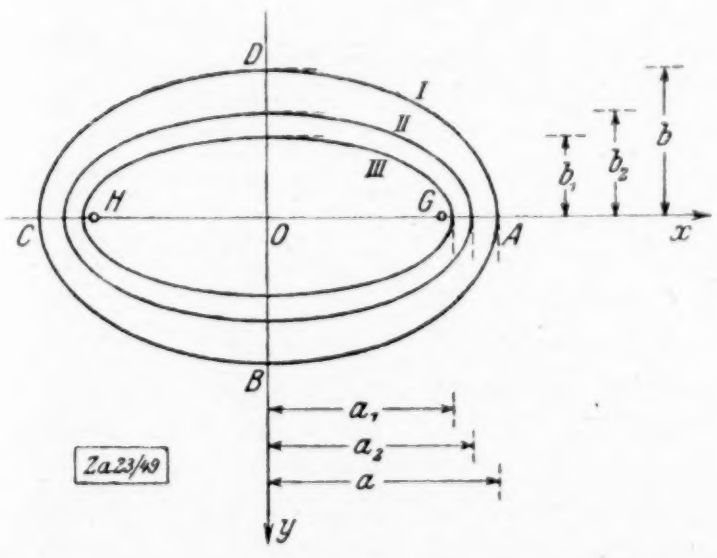


Abb. 12
(Unterfall II)

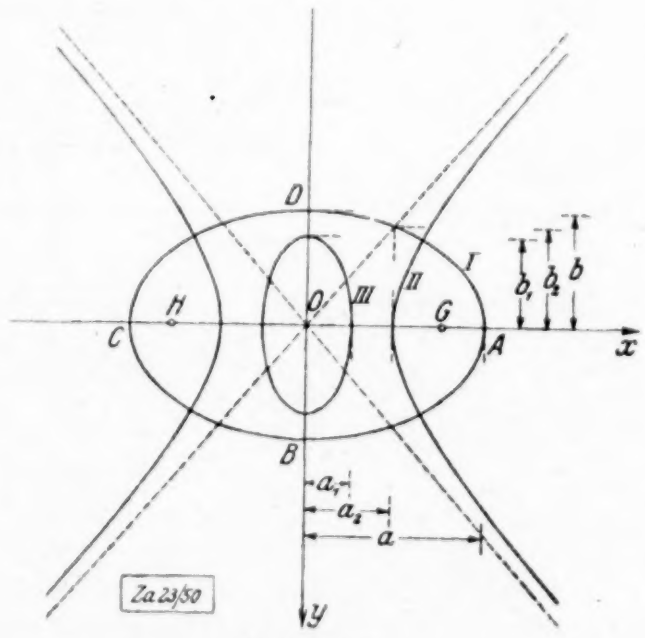


Abb. 13
(Unterfall IV)

Völlig analoge Sätze lassen sich auch noch für den Doppelkegelschnitt in der (x, z)- bezw. (y, z)-Ebene, die Projektion der Berührungskurve auf die (x, z)- bezw. (y, z)-Ebene und die Schnittkurve der Fläche 2. Ordnung mit derselben Koordinatenebene aufstellen.

9. Der spezielle Fall eines Basiskreises. Wir wollen jetzt den bisher ausgeschlossenen besonderen Fall behandeln, daß $a=b\neq 0$ und $\neq\infty$, die Basisellipse (1) also ein Kreis ist. Natürlich sieht man dann von vornherein, daß die Böschungsfläche die beiden Rotationskegel um die z-Achse enthält, die sich von dem Böschungskreis aus nach

[1]) Diese Formeln finden sich bereits angegeben bei O. Schloemilch, Uebungsbuch zum Studium der höheren Analysis, I. Teil, 3. Aufl., Leipzig 1878, S. 156 (vergl. auch R. Ackermann, l. c. S. 58).

ellipse und die Hyperboloide (d. h. wieder ihre reellen Flächenteile in das doppelt zu denkende Aeußere der Basisellipse über (Unterfall I). Die Gleichung (31) ergibt für $\lim \varkappa = 0$ die doppelte z-Ebene; doch die Gleichung (30) ergibt in ihr die Basisellipse (vgl. (24a) S. 204) und zwar als Umhüllungsgebilde der ∞^2 »Tangentialebenen«, deren Ebenenkoordinaten u, v, w der Gleichung (24a) genügen. Analoge Verhältnisse werden wiederholt bei anderen Unterfällen im folgenden auftreten, worauf wir dann im einzelnen nicht jedesmal wieder eingehen.

Für $\lim \varkappa = b^2$ gehen die Ellipsoide in das doppelt zu denkende Innere der Ellipse in der (x, z)-Ebene (Unterfall III) über (vgl. deswegen die Gleichungen (24c) und (28a) S. 206 und Abb. 10). Für $b^2 < \varkappa < a^2$ ergibt die Gleichung (31) einschalige Hyperboloide mit der y Achse als nicht reell schneidender Achse (Unterfall IV) und im Gegensatz zu späteren Fällen (vgl. S. 211) ist hier der Neigungswinkel der einen Asymptote in der (y, z)-Ebene gegen die y-Achse größer als δ. (Es ist jedenfalls überraschend, daß als Spur der Böschungsfläche in der (x, y)-Ebene für ein solches Hyperboloid nicht eine Hyperbel, sondern eine Ellipse sich ergibt.) Für $\lim \varkappa = b^2$ gehen diese Hyperboloide in das doppelt zu denkende Aeußere der Ellipse in der (x, z)-Ebene (Unterfall III) über und für $\lim \varkappa = a^2$ in das doppelt zu denkende Aeußere der Hyperbel in der (y, z)-Ebene (Unterfall V, vgl. die Gleichungen (24d) und (28b) und die Abb. 12).

Für $a^2 < \varkappa < +\infty$ sind die Flächen (31) zweischalige Hyperboloide mit reell schneidender z-Achse (Unterfall VI), und zwar ist der Neigungswinkel der einen Asymptote in der (y, z)-Ebene gegen die y-Achse $> \delta$ und in der (x, z)-Ebene gegen die x-Achse ebenfalls $> \delta$. Für $\lim \varkappa = a^2$ gehen diese Hyperboloide in das doppelt zu denkende Innere der Hyperbel in der (y, z)-Ebene über (Unterfall V).

Wollen wir nun noch die Grenzfläche für $\lim \varkappa = \pm \infty$ bestimmen, so müssen wir die Gleichung (31) in homogenen Koordinaten x, y, z, ω schreiben, nämlich:

$$\frac{x^2}{a^2 - \varkappa} + \frac{y^2}{b^2 - \varkappa} + \frac{z^2}{\varkappa \operatorname{tg}^2} = \omega^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31').$$

Für $\lim \varkappa = \infty$ geht die Gleichung (30), wenn wir diese vorher noch durch $\varkappa$ dividieren, über in die Gleichung (24b) S. 204, d. h. in die Gleichung des ∞ fernen Doppelkegelschnitts, und die Gleichung (31') in die Gleichung $\omega^2 = 0$, d. h. in die doppelt zu denkende ∞ ferne Ebene; es gehen also für $\lim \varkappa = +\infty$ bezw. $-\infty$ unsere Flächen 2. Ordnung über in das dopelte Innere bezw. Aeußere des ∞ fernen Doppelkegelschnittes (Unterfall VII).

Die Resultate über die Art der Flächen 2. Ordnung geben wir der besseren Uebersicht wegen noch einmal in folgender Zusammenstellung:

Fall der Basisellipse (a, b).

I.	$\varkappa = 0$	doppelte Basisellipse (24a) S. 204
II.	$0 < \varkappa < b^2$	Ellipsoide
III.	$\varkappa = b^2$	Doppelellipse (24c) S. 206 der (x, z)-Ebene
IV.	$b^2 < \varkappa < a^2$	einschalige Hyperboloide mit nicht reell schneidender y-Achse
V.	$\varkappa = a^2$	Doppelhyperbel (24d) S. 206 der (y, z)-Ebene
VI.	$a^2 < \varkappa < +\infty$	zweischalige Hyperboloide mit reell schneidender z-Achse
VII.	$\varkappa = \infty$	∞ ferner Doppelkegelschnitt (24b) S. 204
VIII.	$-\infty < \varkappa < 0$	einschalige Hyperboloide mit nicht reell schneidender z-Achse

Wir können noch folgenden Satz hinzufügen: Die Schnitte aller dieser Flächen 2. Ordnung mit der (x, y)-Ebene

$$\frac{x^2}{a^2 - \varkappa} + \frac{y^2}{b^2 - \varkappa} = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34)$$

sind konfokale Kegelschnitte.

Wir wollen endlich noch die Berührungskurve der Böschungsfläche mit der einzelnen (nicht ausgearteten) Fläche 2. Ordnung mit der Gleichung (30) oder (31) berechnen. Die Tangentialebene in irgend einem Punkte (x_0, y_0, z_0) der Fläche (31)

ist gegeben durch die Gleichung (32) der Anmerkung S. 207 und die zugehörigen Ebenenkoordinaten durch die Gleichungen (33 a, b, c). Nun handelt es sich ja bei der Böschungsfläche um diejenigen Tangentialebenen, deren Ebenenkoordinaten auch der Gleichung (24 a) genügen. Setzt man hier für u, v ihre Werte nach den Gleichungen (33 a, b) ein, so gilt also für die Berührungspunkte auch die Gleichung:

$$\frac{a^2}{(a^2-\varkappa)^2}x^2+\frac{b^2}{(b^2-\varkappa)^2}y^2=1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35).$$

Die Berührungskurve ist also allgemein eine Raumkurve 4. Ordnung, nämlich der Schnitt der Fläche 2. Ordnung (31) mit dem elliptischen Zylinder (35). Ihre Projektion auf die (x, y)-Ebene ist die durch die Gleichung (35) dargestellte Ellipse.

Vergleichen wir nun für einen bestimmten Wert $\varkappa$ die Basisellipse (1) und die Projektionsellipse (35) mit dem Schnittkegelschnitt (34), deren Halbachsen a, b bezw.

$$a_1=\frac{|a^2-\varkappa|}{a}, \quad b_1=\frac{|b^2-\varkappa|}{b}, \quad a_2=\sqrt{|a^2-\varkappa|}, \quad b_2=\sqrt{|b^2-\varkappa|}$$

sind, so gelten noch die Beziehungen:

$$a\,a_1=a_2^2, \qquad b\,b_1=b_2^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (36\,\text{a, b})^1),$$

d. h. die Halbachsen a_2, b_2 des Kegelschnittes (34) oder II, der den Schnitt der einzelnen Fläche 2. Ordnung mit der (x, y)-Ebene darstellt, sind bezw. die mittleren geometrischen Proportionalen zu den Halbachsen der Basisellipse I und der Projektion III der Berührungskurve auf die (x, y)-Ebene (Abb. 12 und 13) oder mit anderen Worten: Die Scheitelpunkte der beiden letzten Ellipsen (1) und (35) mit positiver Abszisse (bezw. positiver Ordinate) liegen harmonisch zu den beiden Punkten der x-Achse (bezw. y-Achse), deren Entfernungen vom Koordinatenanfangspunkt die betreffende Halbachse des Kegelschnittes (34) darstellen.

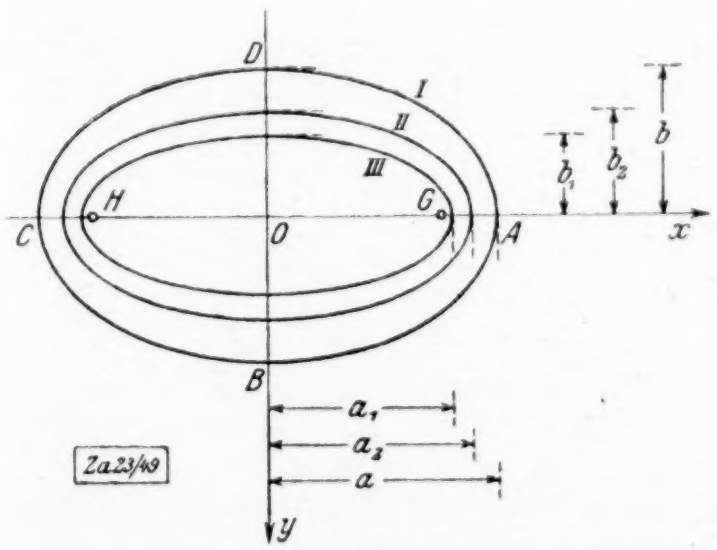


Abb. 12
(Unterfall II)

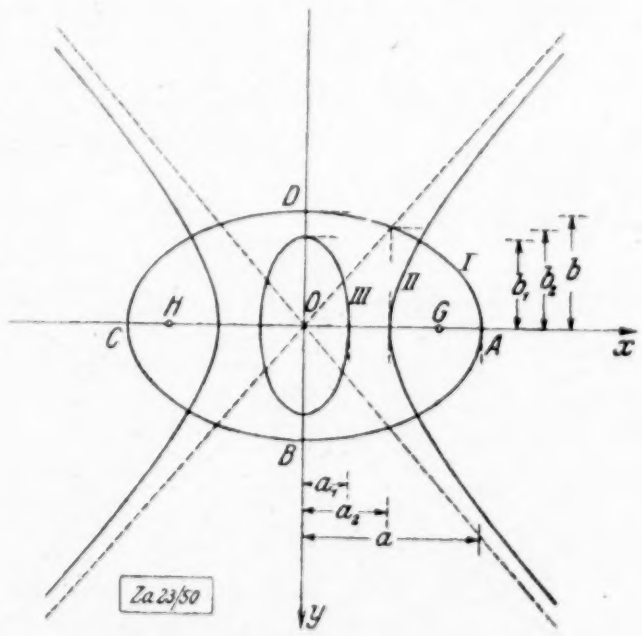


Abb. 13
(Unterfall IV)

Völlig analoge Sätze lassen sich auch noch für den Doppelkegelschnitt in der (x, z)- bezw. (y, z)-Ebene, die Projektion der Berührungskurve auf die (x, z)- bezw. (y, z)-Ebene und die Schnittkurve der Fläche 2. Ordnung mit derselben Koordinatenebene aufstellen.

9. Der spezielle Fall eines Basiskreises. Wir wollen jetzt den bisher ausgeschlossenen besonderen Fall behandeln, daß $a=b\neq 0$ und $\neq\infty$, die Basisellipse (1) also ein Kreis ist. Natürlich sieht man dann von vornherein, daß die Böschungsfläche die beiden Rotationskegel um die z-Achse enthält, die sich von dem Böschungskreis aus nach

[1]) Diese Formeln finden sich bereits angegeben bei O. Schloemilch, Uebungsbuch zum Studium der höheren Analysis, I. Teil, 3. Aufl., Leipzig 1878, S. 156 (vergl. auch R. Ackermann, l. c. S. 58).

oben oder unten erstrecken und den Oeffnungswinkel $2\left(\frac{\pi}{2}-\delta\right)$ besitzen, also durch die beiden Gleichungen:

$$x^2+y^2-(z\pm a\,\mathrm{tg}\,\delta)^2\,\mathrm{ctg}^2\,\delta=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (37\,\mathrm{a,b})$$

bestimmt sind.

Setzen wir in die Gleichung (18) S. 203 der Böschungsfläche jetzt $a=b$, so läßt sich diese Gleichung nach einiger Rechnung überführen in die Form:

$$(\Theta-4\,a^2\,\mathrm{ctg}^2\,\delta\,z^2)\,(\Theta+a^2+\mathrm{ctg}^2\,\delta\,z^2)^2=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18^*),$$

wo als Abkürzung $\Theta=x^2+y^2-\mathrm{ctg}^2\,\delta\,z^2-a^2$ eingeführt ist.

Aus der Gleichung (18*) aber folgt $\Theta\mp 2\,a\,\mathrm{ctg}\,\delta\,z=0$ oder die Gleichung (37 a, b) der beiden Kegel und doppelt zählend $\Theta+a^2+\mathrm{ctg}^2\,\delta\,z^2=0$, d. i.

$$x^2+y^2=0 \quad \text{oder} \quad x\pm i\,y=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (37\,\mathrm{c,d}),$$

d. h. die beiden Ebenen durch die z-Achse und je eine der Minimalgeraden $x\pm iy=0$ in der (x,y)-Ebene, d. h. der Tangenten oder auch Normalen für den Basiskreis in den ∞ fernen imaginären Kreispunkten. Diese beiden Ebenen haben als reelle Schnittlinie die z-Achse, also die Verbindungslinie der beiden Kegelspitzen. Die doppelte z-Achse tritt an die Stelle der Doppelkurven in den (x,z)- und (y,z)-Ebenen, insbesondere ihrer isolierten Zweige (vergl. Abb. 11 und 12).

Die Flächen 2. Ordnung ferner, für welche die Böschungsfläche in diesem besonderen Falle $a=b$ ebenfalls Böschungsfläche ist, sind bestimmt durch die Gleichung in Ebenenkoordinaten:

$$(a^2-\varkappa)\,(u^2+v^2)+\varkappa\,\mathrm{tg}^2\,\delta\,w^2=1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30')$$

oder durch die Gleichung in Punktkoordinaten:

$$\frac{x^2+y^2}{a^2-\varkappa}+\frac{z^2}{\varkappa\,\mathrm{tg}^2\,\delta}=1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31').$$

Die Art dieser Flächen für die einzelnen Möglichkeiten wird durch folgende Zusammenstellung gegeben:

Fall eines Basiskreises $(a=b)$.

I.	$\varkappa=0$	Doppelkreis $u^2+v^2=1$ (vgl. die Bemerkung zum Unterfall I S. 208)
II.	$0<\varkappa<a^2$	Rotationsellipsoide um die z-Achse
III.	$\varkappa=a^2$	$x\pm iy=0$, die doppelte z-Achse, oder $w=1/a$ ctg δ, d. h die beiden Ebenenbündel durch die Kegelspitzen
IV.	$a^2<\varkappa<+\infty$	zweischalige Rotationshyperboloide um die z-Achse
V.	$\varkappa=-\infty$	∞ ferner Doppelkegelschnitt
VI.	$-\infty<\varkappa<0$	einschalige Rotationshyperboloide um die z-Achse

In dem Unterfalle IV ist der Neigungswinkel der einen Asymptote in der (x,z)-Ebene gegen die x-Achse $>\delta$, im Unterfall VI $<\delta$.

10. Die Böschungsfläche einer Basishyperbel. Wir wenden uns nun zu der Untersuchung der Böschungsfläche für die Hyperbel

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \quad (a\neq 0,\ b\neq 0) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1^*).$$

In Linienkoordinaten lautet ihre Gleichung:

$$a^2\,u^2-b^2\,v^2=1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24^*\mathrm{a}).$$

Wir wollen uns jedoch (vgl. die Abb. 3 des Modelles), da die Verhältnisse von denen des vorigen Falles der Basisellipse nicht wesentlich verschieden sind, kurz fassen. Die für die Böschungsfläche der Ellipse abgeleiteten Formeln übertragen sich unmittelbar auf diesen neuen Fall, wenn man in ihnen b durch $b\,i$ ersetzt und für den Parameterwinkel φ der Gleichungen (1 a, b) S. 199 den neuen Parameter ψ durch die Substitutionen einführt:

$$\sin\,\varphi=\frac{1}{i}\,\mathrm{tg}\,\psi, \qquad \cos\,\varphi=\frac{1}{\cos\psi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (37\,\mathrm{a,b}),$$

wodurch an Stelle von $\sqrt{b^2\cos^2\varphi+a^2\sin^2\varphi}$ jetzt $i\sqrt{\frac{b^2+a^2\sin^2\psi}{\cos^2\psi}}$ tritt

Natürlich fällt auch die Ungleichung $a > b$ jetzt fort Was die Gestalt der Böschungsfläche betrifft, so sei nur bemerkt, daß außer der Basishyperbel (37) und dem ∞ fernen Kegelschnitt (24 b) sich noch die folgenden beiden Hyperbeln als Doppelkegelschnitte in der (x, z)- und (y, z)-Ebene ergeben:

$$\frac{x^2}{a^2+b^2} - \frac{z^2}{b^2 \operatorname{tg}^2 \delta} = 1, \qquad \frac{z^2}{a^2 \operatorname{tg}^2 \delta} - \frac{y^2}{a^2+b^2} = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28^* \text{a, b}),$$

oder in Linienkoordinaten:

$$(a^2+b^2)\, u^2 - b^2 \operatorname{tg}^2 \delta\, w^2 = 1, \qquad a^2 \operatorname{tg}^2 \delta\, w^2 - (a^2+b^2)\, v^2 = 1 \qquad (24^* \text{c, d}).$$

Was endlich die Flächen 2. Ordnung betrifft, für die unsere Fläche ebenfalls Böschungsfläche ist, so sind diese bestimmt durch die Gleichung in Ebenen- bezw. Punktkoordinaten:

$$\frac{x^2}{a^2-\varkappa} - \frac{y^2}{b^2+\varkappa} + \frac{z^2}{\varkappa \operatorname{tg}^2 \delta} = 1 \qquad (30^*) \qquad\qquad \frac{x^2}{a^2-\varkappa} - \frac{y^2}{b^2+\varkappa} + \frac{z^2}{\varkappa \operatorname{tg}^2 \delta} = 1 \qquad (31^*)$$

und die Art dieser Flächen für die einzelnen Möglichkeiten ist in der folgenden Zusammenstellung angegeben:

Fall der Basishyperbel.

I.	$\varkappa = 0$	Doppelte Basishyperbel (24* a)
II.	$0 < \varkappa < a^2$	einschaliges Hyperboloid mit nicht reell schneidender y-Achse
III.	$\varkappa = a^2$	Doppelhyperbel (24* d) in der (y, z)-Ebene
IV.	$a^2 < \varkappa < +\infty$	zweischaliges Hyperboloid mit reell schneidender z-Achse
V.	$\varkappa = \infty$	∞ ferner Doppelkegelschnitt (24 b) S. 204
VI.	$-\infty < \varkappa < -b^2$	einschaliges Hyperboloid mit nicht reell schneidender z-Achse
VII.	$\varkappa = -b^2$	Doppelhyperbel (24* c) in der (x, z)-Ebene
VIII.	$-b^2 < \varkappa < 0$	zweischaliges Hyperboloid mit reell schneidender x-Achse

Im Unterfall II ist jetzt der Neigungswinkel der einen Asymptote in der (y, z)-Ebene gegen die y-Achse $< \delta$. Im Unterfall IV ist der Neigungswinkel der einen Asymptote in der (y, z)-Ebene gegen die y Achse $< \delta$ und in der (x, z)-Ebene gegen die x-Achse $> \delta$. Im Unterfall VI ist der Neigungswinkel der einen Asymptote in der (y, z) Ebene gegen die y-Achse $> \delta$ und in der (x, z)-Ebene gegen die x-Achse $< \delta$.

11. Die Böschungsfläche einer Basisparabel. Ihre Rückkehrkante. Wir gehen nun über zur Untersuchung der Böschungsfläche der Parabel, die wegen ihrer einfachen Verhältnisse besonderes Interesse verdient. Die Basisparabel sei gegeben durch die Gleichungen:

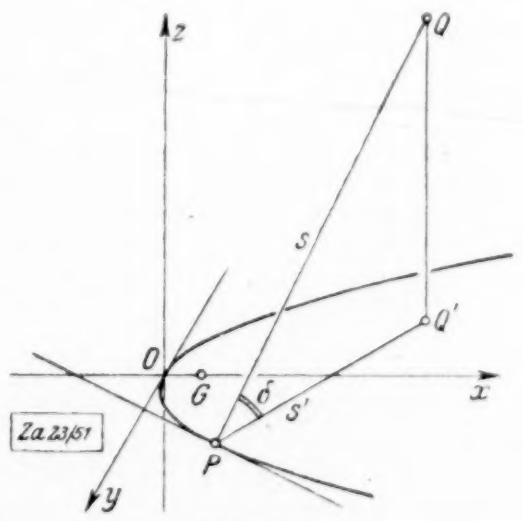


Abb. 14

$$y^2 = 2\,px \quad . \quad . \quad . \quad (38) \qquad \text{oder:} \qquad x = \frac{t^2}{2\,p}, \quad y = t \quad . \quad . \quad . \quad (39\,\text{a, b}).$$

Die Gleichungen der Parabelnormalen im Punkte (x_0, y_0) sind:

$$x = x_0 - \frac{p}{+\sqrt{p^2 + y_0^2}}\, s', \qquad\qquad y = y_0 + \frac{p}{+\sqrt{p^2 + y_0^2}}\, s' \quad . \quad (40\,\text{a, b}).$$

Wieder erhält man hieraus (analog wie auf S. 200) die Gleichungen der Böschungsfläche mit den Parametern s, t, wenn man $s' = s \cos \delta = s\, \nu$ und $x_0 = \frac{t^2}{2\,p}$, $y_0 = t$ (41 a, b) setzt (Abb. 14):

$$x = \frac{t^2}{2\,p} - \frac{p}{+\sqrt{p^2 + t^2}}\, \nu\, s, \qquad y = t + \frac{p}{+\sqrt{p^2 + t^2}}\, \nu\, s, \qquad z = \pm \sqrt{1 - \nu^2}\, s \quad (42\text{a,b,c}).$$

Die Böschungsfläche ist symmetrisch zu den (x, y)- und (x, z)-Ebenen. Ihre Rückkehrkante liegt auf dem Zylinder, der sich über der Evolute der Parabel senk-

recht zur (x, y)-Ebene erhebt. Die Evolute, bekanntlich eine Neilsche oder semikubische Parabel[1]), ist durch die Gleichung 3. Grades bestimmt:

$$(x-p)^3 = \frac{27\,p}{8}\,y^2 \qquad (43) \qquad \text{oder} \qquad x = 3\,\frac{t^2}{2\,p} + p, \quad y = \frac{t^3}{p^2} \qquad (43\,\text{a, b}),$$

die Rückkehrkante (Abb. 15) also durch die Gleichungen:

$$x = 3\,\frac{t^2}{2\,p} + p, \quad y = -\frac{t^3}{p^2}, \quad z = \pm\,\varrho\,\operatorname{tg}\delta = \pm\,p\,\operatorname{tg}\delta\left(\frac{t^2}{p^2}+1\right)^{3/2} \qquad (44\,\text{a, b, c}).$$

Die Projektionen der Rückkehrkante auf die (x, z)- und (y, z)-Ebenen haben bezw. die Gleichung

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^3 = \frac{27}{8}\,p\,\operatorname{ctg}^2\delta\,z^2 \qquad (45)$$

und

$$\left(\frac{z}{\operatorname{tg}\delta}\right)^{2/3} - y^{2/3} = p^{2/3} \qquad (46);$$

sie sind also, wie wir nicht weiter ausführen wollen, Evoluten einer bestimmten Parabel bezw. Hyperbel in diesen Ebenen. Für $t^2 = \tau$ können wir die Gleichungen (44 a, b, c) auch in der Form schreiben:

$$x = p + \frac{3}{2\,p}\,\tau, \quad y^2 = \frac{1}{p^4}\,\tau^3, \quad z^2\operatorname{ctg}^2\delta = p^2 + 3\,\tau + \frac{3}{p^2}\,\tau^2 + \frac{1}{p^4}\,\tau^3 \qquad (44'\,\text{a, b, c}).$$

Hieraus folgt:

$$x - p = \frac{3}{2\,p}\,\tau \quad \text{und} \quad z^2\operatorname{ctg}^2\delta - p^2 - 2\,p\,(x-p) - y^2 = \frac{3}{p^2}\,\tau^2,$$

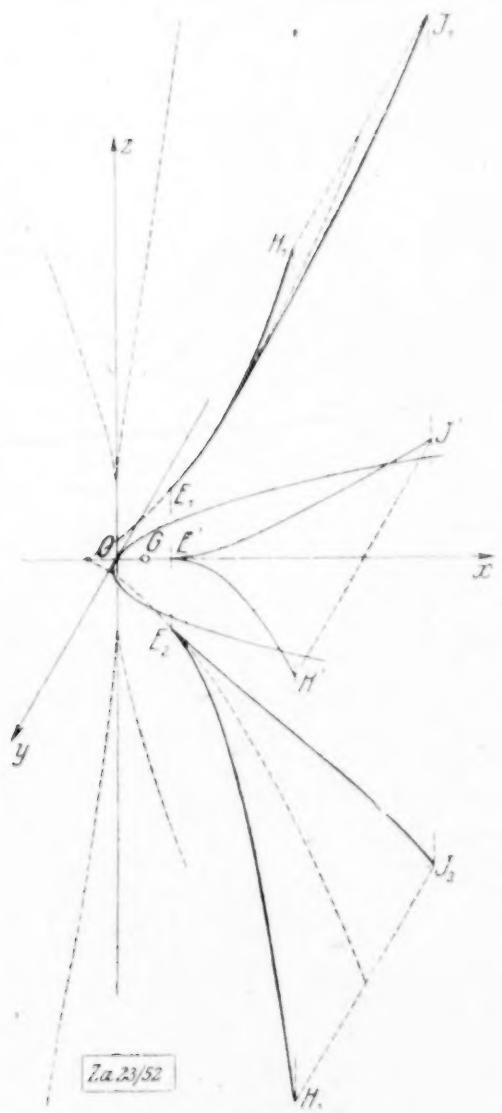


Abb. 15

oder durch Elimination von τ:

$$-\left(x-\frac{p}{4}\right)^2 - \frac{3}{4}\,y^2 + \frac{3}{4}\operatorname{ctg}^2\delta\,z^2 - \frac{3}{16}\,p^2 = 0 \qquad (47);$$

d. h.: Die Rückkehrkante liegt auf einer Fläche 2. Grades, nämlich dem durch die Gleichung (47) gegebenen zweischaligen Hyperboloid mit dem Mittelpunkt $x = \frac{p}{4}$, $y = z = 0$ und mit reell schneidender Parallelen zur z-Achse durch den Mittelpunkt (vergl. den Satz S. 202).

Setzen wir weiter die Werte für x^2, y^2, z^2 nach den Gleichungen (44'a, b, c) in die Gleichung (16) ein, so ergibt sich wieder eine Gleichung 6. Grades für τ. Zu jedem Wurzelwert τ_i gehören aber nach den Gleichungen (44'a, b, c) vier Schnittpunkte (x, y, z). Also erhalten wir für jede der Schnittebenen sechs Schnittpunkte, d. h.: Die Rückkehrkante ist von der 6. Ordnung. Sie ist daher auch der vollständige Schnitt der Fläche 2. Grades (47) mit der Fläche 3. Grades (43).

12. Gleichung der Parabel-Böschungsfläche ohne Parameter. Ihre Gleichungen in Ebenenkoordinaten. Es läßt sich nun leicht auch die Elimination der Parameter s, t aus den Gleichungen (42 a, b, c) der Böschungsfläche ausführen. Wir setzen vorübergehend $\sqrt{p^2+t^2} = \sigma$, also $t = \sqrt{\sigma^2 - p^2}$. Dann ergeben die Gleichungen (42 a, b), wenn man noch nach der Gleichung (42 c) (zunächst etwa für das obere Vorzeichen) $r\,s = \operatorname{ctg}\delta\,z$ einsetzt:

$$\left.\begin{aligned} &\sigma^3 - \sigma\,p\,A - 2\,p^2\operatorname{ctg}\delta\,z = 0 \\ &\sigma^4 + 2\,\sigma^3\,z\operatorname{ctg}\delta - \sigma^2\,(B + p\,A) - 2\,\sigma\,p^2\,z\operatorname{ctg}\delta - p^2\,z^2\operatorname{ctg}^2\delta = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (48\,\text{a, b}),$$

wo zur Abkürzung:

$$A = p + 2\,x, \qquad B = -2\,p\,x + y^2 - z^2\operatorname{ctg}^2\delta \qquad (49)$$

eingeführt ist.

---

[1]) Vergl. G. Loria, l. c. S. 261.

Als Resultat der Elimination von σ aus den Gleichungen (48a, b) ergibt sich dann nach einiger Rechnung, indem man etwa aus den Gleichungen (48a, b) σ^4 eliminiert, aus der neuen Gleichung und (48) dann σ^3 usw.:

$$A^2 B^2 - 4\,p\,\mathrm{ctg}^2\delta\,z^2 A^3 - 27\,p^2\,\mathrm{ctg}^4\delta\,z^4 - 18\,p\,\mathrm{ctg}^2\delta\,z^2 AB + 4\,B^3 = 0 \qquad (50)$$

oder

$$(p+2x)^2(-2px + y^2 - z^2\,\mathrm{ctg}^2\delta)^2 - 4\,p\,\mathrm{ctg}^2\delta\,z^2(p^2+2x)^3 - 27\,p^2\,\mathrm{ctg}^4\delta\,z^4$$
$$-18\,p\,\mathrm{ctg}^2\delta z^2(p+2x)(-2px+y^2-z^2\,\mathrm{ctg}^2\delta)+4(-2px+y^2-z^2\,\mathrm{ctg}^2\delta)^3 = 0 \qquad (50').$$

Zu dieser Gleichung werden wir auch durch einen Grenzübergang geführt, den wir mit der Gleichung (18) S. 203 vornehmen. Ersetzen wir zunächst in der Ellipsengleichung (1) S. 199 x durch $x - a$ und setzen wir $b^2 = a\,p$, so ergibt sich:

$$\frac{x^2 - 2\,a\,x}{a} + \frac{y^2}{p} = 0,$$

woraus wir für $\lim a = \infty$ die Parabelgleichung (38) S. 211 erhalten. Der gleiche Grenzübergang mit $\lim a = \infty$ nach Ersetzen von x durch $x - a$ führt die vorher durch a^6 dividierte Gleichung (18) S. 203 über in (50'). Hierbei erkennt man noch, daß bei homogener Schreibweise der Gleichung (18) die ∞ ferne Ebene $\omega = 0$ sich doppelt abscheidet.

Die Gleichung (50) zeigt nun: Die Böschungsfläche der Parabel ist von der 6. Ordnung, ebenso wie die Parallelkurven der Parabel. Letztere werden ja durch die Gleichung (50) dargestellt, wenn die Größe $z\,\mathrm{ctg}\,\delta$ durch eine Konstante ersetzt wird, die zugleich dann den Abstand der Parallelkurve von der Parabel bedeutet.

Analog wie bei der Böschungsfläche der Ellipse auf S. 203 ergeben sich weiter die folgenden Gleichungen der Böschungsfläche der Parabel in den Ebenenkoordinaten u, v, w:

$$u = \frac{1}{x_0}, \qquad v = -\frac{y_0}{p\,x_0}, \qquad w = \frac{\sqrt{p^2 + y_0^2}}{\mathrm{tg}\,\delta\,p\,x_0} \quad . \quad . \quad (51\,\mathrm{a, b, c}),$$

wo für den Parabelpunkt (x_0, y_0) nach (39a, b) $x_0 = \frac{t^2}{2p}$, $y_0 = t$ gilt. Nach Einsetzen dieser Werte erhalten wir also die Gleichungen unserer abwickelbaren Fläche in Ebenenkoordinaten mit dem Parameter t:

$$u = \frac{2p}{t^2}, \qquad v = -\frac{2}{t}, \qquad w = \frac{2\sqrt{p^2 + t^2}}{\mathrm{tg}\,\delta\,t^2} \quad . \quad . \quad (52\,\mathrm{a, b, c}).$$

Durch Elimination ergeben sich hieraus die beiden Gleichungen:

$$v^2 = 2\,q\,u, \text{ wo } q = \frac{1}{p} \text{ ist, und } u^2 + v^2 - \mathrm{tg}^2\,\delta\,w^2 = 0 \quad . \quad . \quad (53\,\mathbf{a, b}).$$

Die erste dieser Gleichungen ist in der (x, y)- oder (u, v) Ebene gedeutet, die Gleichung der Basisparabel in Linienkoordinaten; die zweite Gleichung ist identisch mit der Gleichung (24b). Es überträgt sich daher der Satz S. 204: Auch die Böschungsfläche der Parabel ist von der 4. Klasse.

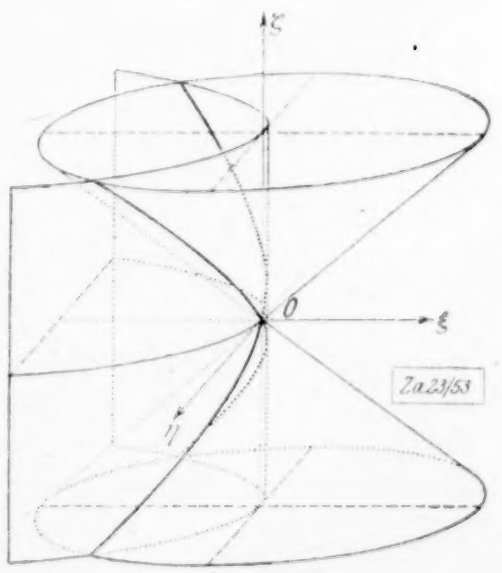


Abb. 16

13. Uebertragung der Betrachtungen für die Parabel in das duale Gebiet. Doppelkurven der Böschungsfläche. Den letzten Satz werden wir noch anschaulicher übersehen, wenn wir nunmehr dazu übergehen, unsere Betrachtungen wieder, analog wie bei der Betrachtung der Ellipse, in das duale Gebiet zu übertragen. Die Gleichungen (53a, b) ergeben dann dual:

$$\eta^2 = -2\,q\,\xi, \text{ wo } q = \frac{1}{p} \text{ ist,}$$
$$\text{und } \xi^2 + \eta^2 - \mathrm{tg}^2\,\delta\,\zeta^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (54\,\mathrm{a, b}),$$

d. h. eine Raumkurve 4. Ordnung als Schnittkurve des parabolischen Zylinders (54a) parallel zur ζ-Achse und des uns schon von S. 00 her wohlbekannten Rotationskegels (54b) um die ζ-Achse (Abb. 16 und 17). Wir bemerken weiter sogleich: Der Koordinatenanfangspunkt ist ein Doppelpunkt der durch die Gleichungen (54a, b) dargestellten Raumkurve. Die duale Beziehung zwischen der Böschungsfläche und

ihrer Rückkehrkante einerseits, der Raumkurve andererseits sei zunächst noch durch folgende übersichtliche Zusammenstellung erläutert[1]) (jener auf S. 205 analog):

Rückkehrkante (75a, b, c)		Raumkurve (82a, b)	
Ordnung der Böschungsfläche oder Rang der Rückkehrkante	=	Rang der Raumkurve oder Ordnung ihrer abwickelbaren Tangentenfläche	= 6 (vgl. Satz S. 213)
Klasse der Böschungsfläche	=	Ordnung der Raumkurve	= 4 (vgl. Satz S. 213)
Ordnung der Rückkehrkante	=	Klasse der abwickelbaren Tangentenfläche	= 6 (vgl. Satz S. 212)

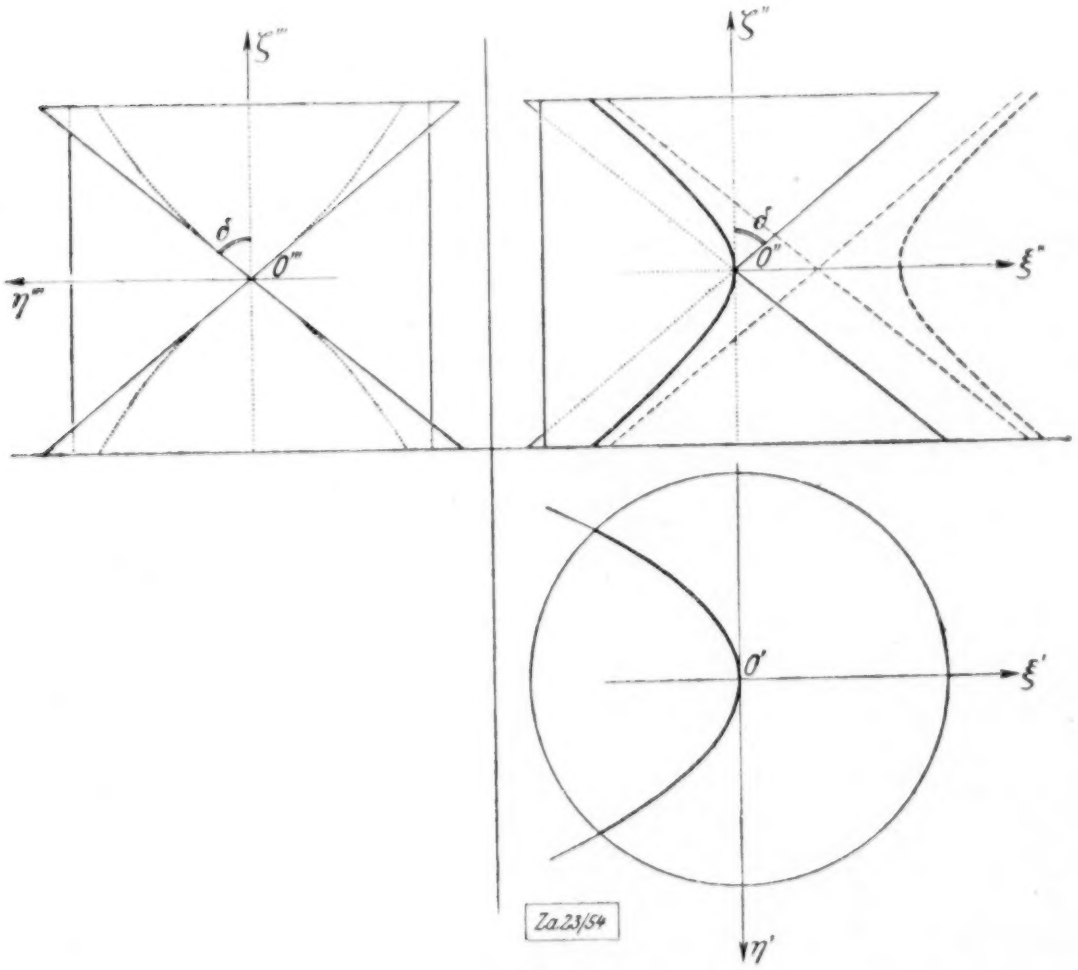


Abb. 17

Im vorliegenden Falle[2]) zählt nun bei den 4 durch die Raumkurve (54a, b) gehenden Kegeln oder Zylindern der Kegel (54) doppelt, so daß außer ihm und dem Zylinder (54) nur noch ein zur y-Achse paralleler hyperbolischer Zylinder sich ergibt mit der durch Subtraktion der Gleichungen (54a, b) entstehenden Gleichung:

$$(\xi - q)^2 - \operatorname{tg}^2 \delta\, \zeta^2 = q^2 \quad (55).$$

Von den beiden Aesten der Hyperbel in der (ξ, ζ)-Ebene (Aufriß der Abb. 17) ist nur der eine ausgezogene die Projektion von reellen Punkten der Raumkurve. Die Projektion der Raumkurve auf die (η, ζ)-Ebene (Seitenriß der Abb. 17) ist eine doppeltsymmetrische Kurve vierter Ordnung und wird durch die Gleichung gegeben:

$$\zeta^2 = \frac{\eta^4 + 4q^2\eta^2}{4q^2 \operatorname{tg}^2 \delta} \qquad (56).$$

Die beiden Tangenten in den Doppelpunkten der Raumkurve haben gegen die positive Richtung der η-Achse die Abweichungen $\pm\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right)$; sie sind daher durch die Gleichungen:

$$\xi = 0, \quad \zeta = \pm \operatorname{ctg} \delta\, \eta \quad . \quad . \quad (57a, b, c)$$

bestimmt, wo die Gleichungen (57b, c) ersichtlich zugleich die Oskulationsebenen der Raumkurve im Doppelpunkt O darstellen.

Gemäß der Gleichung (55) folgt nun dual analog dem Satze S. 206: Die Böschungsfläche der Parabel besitzt noch in der (u, w)- oder (x, z)-Ebene als Doppelkurve den Kegelschnitt (Abb. 18):

$$(u + q)^2 - \operatorname{tg}^2 \delta\, w^2 = q \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (58)$$

oder in Punktkoordinaten:

$$z^2 = 2p \operatorname{tg}^2 \delta \left(x - \frac{p}{2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (59),$$

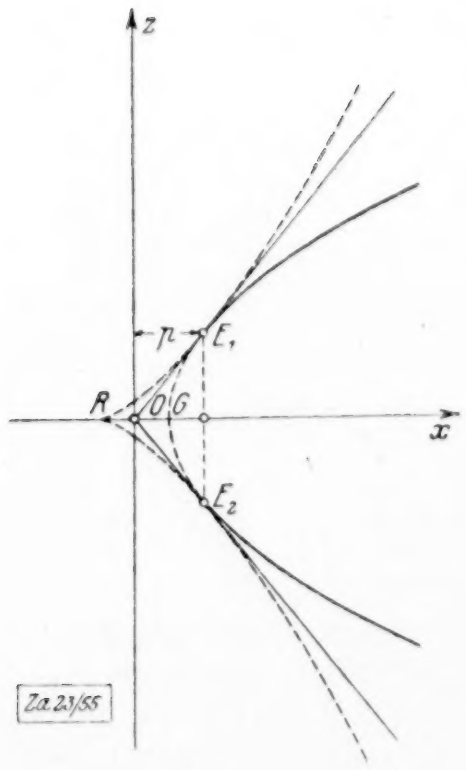


Abb. 18

[1]) Vgl. Salmon-Fiedler, l. c. II. Teil, S. 135.

[2]) Vgl. Salmon-Fiedler, l. c. II. Teil, S. 185, Nr. 15.

d. h. die Parabel (Abb. 18) mit dem Scheitel $x = \frac{p}{2}$ auf der x-Achse, also im Brennpunkt G (vgl. Abb. 15) der Basisparabel, und mit dem Parameter $p\,\mathrm{tg}^2\,\delta$. Die beiden Berührungspunkte E_1, E_2 der vom Koordinatenanfangspunkt ausgehenden Tangenten an diese Parabel liegen in den Spitzen der Rückkehrkurve der Böschungsfläche (vgl. Abb. 15). (Diese genannten beiden Tangenten sind eben zugleich die beiden Erzeugenden der Böschungsfläche in der (x, y)-Ebene.) Die Projektion der Rückkehrkurve ist in der Abb. 18 gleichfalls eingezeichnet. Der Bogen der Parabel (59) zwischen diesen Punkten E_1, E_2 verläuft als isolierte Doppelkurve der Böschungsfläche. Dementsprechend hat auch jeder Horizontalschnitt der Fläche, für den $-p\,\mathrm{tg}\,\delta < z < +p\,\mathrm{tg}\,\delta$ ist, einen isolierten Punkt im Schnittpunkt der Ebene mit der Parabel (59). Mit anderen Worten ergibt dies Resultat den Satz:

Die Parallelkurven der Parabel $y^2 = 2\,p\,x$ im Abstand c besitzen einen isolierten Doppelpunkt an der Stelle $x = \frac{c^2 + p^2}{2\,p}$ der x-Achse, wenn $c < p$ ist, wo p ja gleich dem Krümmungsradius der Parabel im Scheitelpunkt ist.

Die Ebene $z = 0$ selbst schneidet die Böschungsfläche außer in der doppelten Basisparabel in den beiden Minimalgeraden $y = \pm\left(x - \frac{p}{2}\right) i$ mit dem reellen Schnittpunkt $x = \frac{p}{2}$, $y = 0$ (vgl. deswegen die Gleichung (50′) S. 213).

Der durch die Gleichung (53) dargestellte ∞ ferne Kegelschnitt der Böschungsfläche ist indessen nur eine einfache Kurve der Fläche entsprechend der Tatsache im dualen Gebiet, daß der Kegel (54b) den Doppelpunkt der Raumkurve als Spitze besitzt. Als vollständiger Schnitt der Böschungsfläche (50′) mit der ∞ fernen Ebene $\omega = 0$ ergibt sich aus der homogenen Schreibweise der Gleichung (50):

$$x^2 + y^2 - z^2\,\mathrm{ctg}^2\,\delta = 0,\ \omega = 0 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (60\,\mathrm{a, b})$$

und

$$(y^2 - z^2\,\mathrm{ctg}^2\,\delta)^2 = 0,\ \omega = 0 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (61\,\mathrm{a, b}),$$

d. h.: Außer dem soeben erwähnten ∞ fernen Kegelschnitt (53b) oder (60a, b) enthält die Fläche im Unendlichen noch die zwei reellen Doppelgeraden:

$$z = \pm\,\mathrm{tg}\,\delta\,y, \quad \omega = 0 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (61'\,\mathrm{a, b}).$$

Diese Gleichungen zeigen zugleich, daß diese ∞ fernen Doppelgeraden auch Tangenten an den ∞ fernen Kegelschnitt sind. Diese Doppelgeraden werden in Ebenenkoordinaten durch die Gleichungen gegeben:

$$v \pm \mathrm{tg}\,\delta\,w = 0, \quad u = 0 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (62\,\mathrm{a, b, c}).$$

Man vergleiche die dualen Gleichungen (57a, b, c) der Tangenten des Doppelpunktes. Dieser Vergleich zeigt ferner: Da ja jedem Punkte der Raumkurve (54a, b) dual eine Oskulationsebene der Rückkehrkurve der Böschungsfläche entspricht, so ist die dem Doppelpunkt dual entsprechende ∞ ferne Ebene Oskulationsebene für die zwei reellen ∞ fernen Punkte $x = \omega = 0$, $z = \pm\,\mathrm{tg}\,\delta\,y$ der Rückkehrkurve (vgl. deswegen Abb. 17), d. h. die Böschungsfläche berührt die ∞ ferne Ebene längs den Geraden (61′a, b).

14. Die zur Böschungsfläche zugehörigen Flächen 2. Ordnung. Analog den Betrachtungen auf S. 207 wollen wir nun wieder die reellen Flächen 2. Ordnung bestimmen, für welche unsere Böschungsfläche der Parabel ebenfalls Böschungsfläche ist. Diese Flächen 2. Ordnung sind ja wieder die duale Uebertragung des Büschels derjenigen Flächen 2. Ordnung, die durch die Raumkurve (54a, b) hindurchgehen. Sie werden durch die aus den Gleichungen (53a, b) S. 213 sich ergebende Gleichung in Ebenenkoordinaten dargestellt:

$$-\varkappa\,u^2 + (1 - \varkappa)\,v^2 - 2\,q\,u + \varkappa\,\mathrm{tg}^2\,\delta\,w^2 = 0 \quad . \ . \ . \ . \ . \quad (63),$$

wo der Parameter $\varkappa$ jeden Wert $-\infty < \varkappa \leqq +\infty$ annehmen kann.

In Punktkoordinaten lautet die letzte Gleichung (für $q = 1/p$):

$$-2\,p\left(x - \varkappa\,\frac{p}{2}\right) + \frac{y^2}{1 - \varkappa} + \mathrm{ctg}^2\,\delta\,\frac{z^2}{\varkappa} = 0 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (64)$$

(vgl. wegen ihrer Ableitung die Anm. S. 207). Wir gewinnen somit folgende Zusammenstellung:

Fall der Basisparabel.

I.	$\varkappa = 0$	doppelte Basisparabel (38) S. 211 bezw. (53a) S. 213
II.	$0 < \varkappa < 1$	elliptische Paraboloide
III.	$\varkappa = 1$	doppelte Parabel der (x, z)-Ebene (58) bezw. (59) S. 214
IV.	$1 < \varkappa < +\infty$	hyperbolische Paraboloide
V.	$\varkappa = \infty$	∞ ferner Kegelschnitt (53b)
VI.	$-\infty < \varkappa < 0$	hyperbolische Paraboloide

Die Paraboloide haben stets die x-Achse als ihre Achse und ihr Scheitelpunkt liegt dort an der Stelle $x = \varkappa p/2$.

Die beiden Unterfälle IV und VI unterscheiden sich so: Die »Asymptotenebenen« (d. h. die Ebenen durch die x-Achse des hyperbolischen Paraboloids und durch die eine oder andere ∞ ferne Erzeugende oder die Tangentialebenen für die ∞ fernen Punkte der Scheitelerzeugenden) haben die Neigungen $\pm \sqrt{\frac{\varkappa}{\varkappa - 1}}\ \mathrm{tg}\ \delta$, d. h. eine Neigung $< \delta$ bezw. $> \delta$.

(Es mag noch auf folgendes hingewiesen sein: Hyperbolische oder elliptische Paraboloide mit vertikaler Achse kommen unter den Flächen 2. Ordnung, deren Böschungsflächen zugleich die vollen Böschungsflächen für einen horizontalen Kegelschnitt sind, nicht vor. Der Grund ist einfach darin zu sehen, daß diese Paraboloide keine horizontale Symmetrieebene besitzen.) Die Schnitte aller dieser Paraboloide mit der (x, y)-Ebene sind die konfokalen Parabeln

$$y^2 = 2p(1 - \varkappa)\left(x - \varkappa \frac{p}{2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (65),$$

ihr Brennpunkt auf der x-Achse ist eben stets durch $x = p/2$ gegeben.

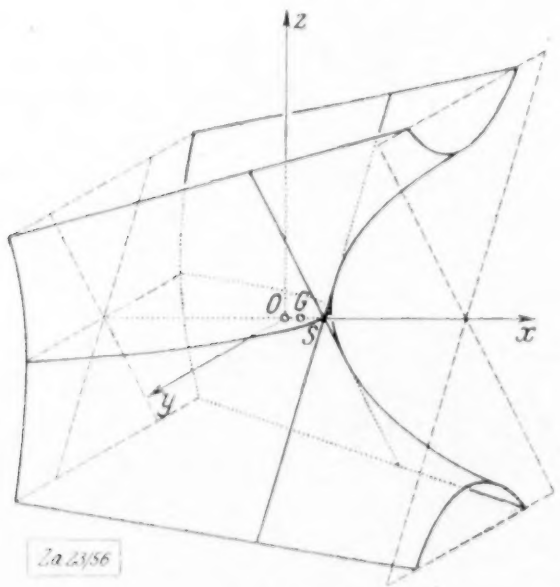


Abb. 19
(Unterfall IV; $\varkappa = 3$)

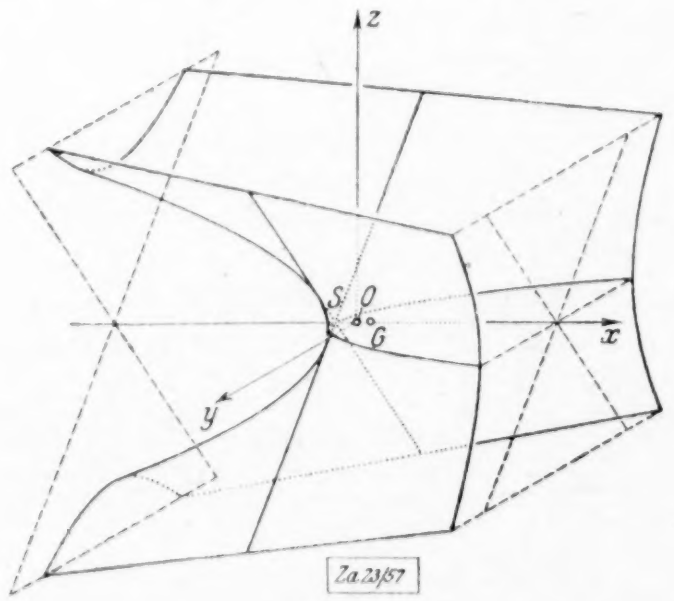


Abb. 20
(Unterfall IV; $\varkappa = -3/2$)

In den Unterfällen IV und VI haben diese Schnittparabeln als ihre »positive« Achsenrichtung bezw. die negative oder positive Richtung der x-Achse (Abb. 19 und 20, die im halben Maßstab der zugehörigen früheren Abbildungen gezeichnet sind). Endlich wollen wir auch hier die Berührungskurve der Böschungsfläche mit der einzelnen (nicht ausgearteten) Fläche 2. Ordnung mit der Gleichung (63) oder (64) berechnen. Die Tangentialebene in irgendeinem Punkte (x_0, y_0, z_0) der Fläche (64) ist gegeben durch

$$-p(x + x_0 - \varkappa p) + \frac{y_0}{1 - \varkappa} y + \frac{\mathrm{ctg}^2 \delta}{\varkappa} z_0 z = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (66)$$

und hat die Achsenabschnitte:

$$x = -(x_0 - \varkappa p), \quad y = p \frac{(1 - \varkappa)}{y_0}(x_0 - \varkappa p), \quad z = \frac{\varkappa p}{\mathrm{ctg}^2 \delta\, z_0}(x_0 - \varkappa p),$$

also die Ebenenkoordinaten:

$$u = \frac{1}{x_0 - \varkappa p}, \quad v = -\frac{y_0}{p(1 - \varkappa)} \frac{1}{x_0 - \varkappa p}, \quad w = \frac{-\mathrm{ctg}^2 \delta\, z_0}{\varkappa p} \cdot \frac{1}{x_0 - \varkappa p}.$$

Diese Ebenenkoordinaten genügen nun auch der Gleichung (53a) S. 213. Also ergibt sich für die Berührungspunkte (x_0, y_0, z_0) auch die Gleichung:

$$y^2 = 2p(1-\varkappa)^2(x-\varkappa p) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (67).$$

Die Berührungskurve ist also die Raumkurve 4. Ordnung, die sich als Schnitt der Fläche (64) S. 215 mit dem parabolischen Zylinder (67) ergibt. Ihre Projektion auf die (x, y)-Ebene ist die durch die Gleichung (67) dargestellte Parabel, deren »positive« Achsenrichtung mit der positiven Richtung der x-Achse übereinstimmt. Vergleicht man mit der Gleichung (67) die Gleichung (38) der Basisparabel und die Gleichung (65), so ergibt sich noch der den Sätzen der S. 209 entsprechende Satz:

Der Parameter $p_2 = p\,|1-\varkappa|$ der Schnittparabel II des einzelnen Paraboloids mit der (x, y)-Ebene ist die mittlere geometrische Proportionale zwischen den Parametern p und $p(1-\varkappa)^2$ der Basisparabel I und der Projektion III der Berührungskurve auf die (x, y)-Ebene und der Scheitel der erstgenannten Parabel liegt in der Mitte zwischen den Scheiteln der beiden letztgenannten (Abb. 21, entsprechend der Abb. 19).

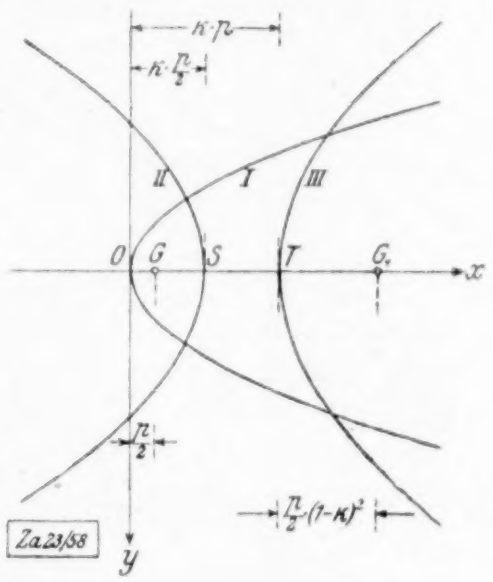


Abb. 21

Ich habe auch die Böschungsflächen für alle Fälle ausgearteter Basiskegelschnitte mitsamt den zugehörigen Flächen 2. Grades untersucht. So interessant diese Grenzfälle an sich sind, würde die Wiedergabe dieser umfangreichen Betrachtungen doch zu viel Raum erfordern. 194

Zur Synthese der Getriebe.

Von **K. FEDERHOFER** in Graz.

Die Getriebesynthese befaßt sich bekanntlich mit der Aufgabe, zwangläufige kinematische Ketten aufzusuchen, die bei ihrer Bewegung bestimmte Bedingungen erfüllen. Zunächst werden für die, meist durch den Zweck des Getriebes vorgeschriebene Zahl der Glieder und der sie verbindenden niederen und höheren Elementenpaare die hiernach überhaupt möglichen zwangläufigen kinematischen Ketten ermittelt, wobei man entweder die von M. Grübler[1]) angegebenen Bedingungen für den Zwanglauf oder jene von F. Wittenbauer[2]) benutzt. Ist dann aus der so erhaltenen Gruppe von Ketten die für den angestrebten Zweck des Getriebes geeignetste ausgewählt — bei der Auswahl werden dynamische und technologische Gesichtspunkte mitbestimmend sein —, so können an diese kinematische Kette noch Forderungen gestellt werden, welche die Einhaltung bestimmter gegenseitiger Lagen einzelner Glieder der Kette sowie die Erreichung bestimmter Bahnen, Geschwindigkeiten oder Beschleunigungen einzelner Punkte der Kette betreffen.

In der vortrefflichen Getriebelehre von Grübler wird die Lösung eines großen Teiles der hier knapp angedeuteten Fragen in übersichtlicher Weise auf zeichnerischem Wege gegeben, H. Alt[3]) lieferte in seiner Dresdener Habilitationsschrift wertvolle Beiträge zur Synthese ebener Mechanismen. Im folgenden soll eine bisher unbehandelte Problemgruppe Erörterung finden, welche die Forderung bestimmter Beschleunigungen betrifft. Die zeichnerischen Verfahren zur Darstellung des Beschleunigungszustandes der ebenen Systembewegung ermöglichen verhältnismäßig einfache graphische Lösungen der gestellten Aufgaben.

---

[1]) M. Grübler, Getriebelehre, Berlin 1917, S. 13–38.

[2]) F. Wittenbauer, Graphische Dynamik, S. 221 u. f. J. Springer, Berlin 1923. Auf dieses originelle, bedeutsame Werk des so jäh aus reichem Schaffen durch den Tod abberufenen erfolgreichen Forschers und Lehrers sei besonders aufmerksam gemacht, da es auch der Getriebesynthese neue Gesichtspunkte liefern wird.

[3]) H. Alt, Zur Synthese ebener Mechanismen. Diese Zeitschrift 1921, Bd. 1, S. 373 u. f.

1. Allgemeine Aufgabe. Zunächst soll folgende allgemeine Aufgabe behandelt werden: Zwei Ebenen ε und E bewegen sich in derselben ruhenden Ebene; ihre momentanen Drehpole O_ε, O_E sind gegeben, ebenso die Beschleunigungspole P_ε, P_E für den betrachteten Augenblick. Die beiden Ebenen seien durch eine dritte Ebene in den Gelenken A, B verbunden.

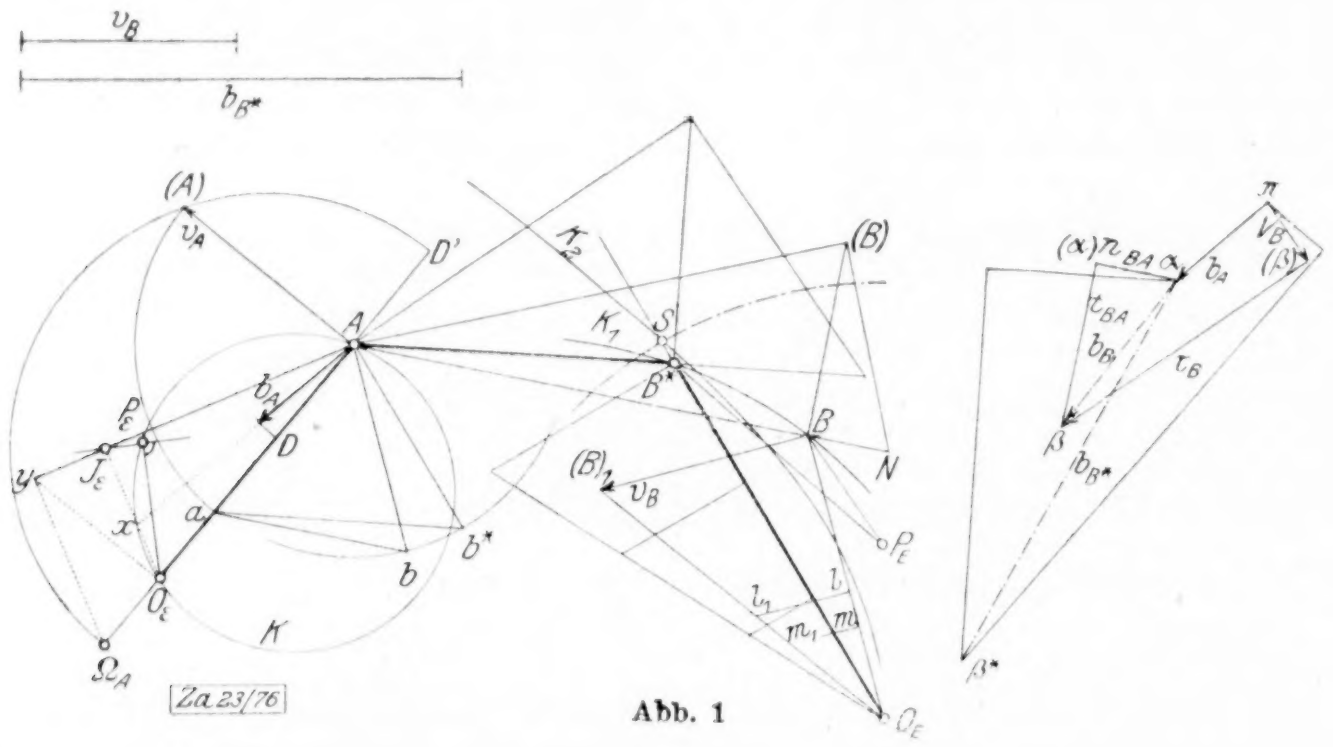


Abb. 1

Es soll bei gegebener Beschleunigung b_A des beliebig gewählten Gelenkes A die Lage des Gelenkes B so ausgemittelt werden, daß dessen Geschwindigkeit und Beschleunigung vorgeschriebene Werte v_B und b_B annehmen (Abb. 1). Größe und Richtung der Geschwindigkeit v_A des in der Ebene ε gelegenen Punktes A sind durch die Angabe von O_ε, P_ε und b_A vollständig bestimmt. Projizieren wir b_A auf die Bahnnormale von A, dann ist $A\,D = v_A^2 : \varrho$ die Zentripetalbeschleunigung von A mit ϱ als Krümmungshalbmesser der Bahn von A. Letzterer ist aber nach einer Konstruktion, deren Begründung später gegeben werden soll, um von unserer angestrebten Lösung nicht zu sehr abzuschweifen, leicht zu ermitteln. Wir zeichnen den Umkreis K des Dreieckes $A\,O_\varepsilon\,P_\varepsilon$, verbinden den Punkt x, in dem er von der Richtung b_A geschnitten wird, mit O_ε und bringen diese Gerade mit der in P_ε auf $O_\varepsilon P_\varepsilon$ errichteten Senkrechten zum Schnitte. Der Schnittpunkt J_ε ist der Wendepol der Bewegung des ebenen Systems ε. Ziehen wir nun nach der bekannten Konstruktion von Schell[1]) $A\,J_\varepsilon$, bestimmen den Schnittpunkt y dieser Geraden mit der in O_ε auf $A\,O_\varepsilon$ errichteten Senkrechten, legen endlich durch y die Parallele zu $J_\varepsilon O_\varepsilon$, dann schneidet diese die Bahnnormale im Krümmungsmittelpunkte Ω_A. Machen wir nun $A\,D = A\,D'$, schlagen über $\Omega_A\,D'$ einen Halbkreis und bezeichnen dessen Schnittpunkt mit der Bahntangente mit (A), dann gilt:

$$\overline{A\,(A)}^2 = (\overline{A\,\Omega_A})\,(\overline{A\,D'}) = \varrho\,A\,D = v_A^2,$$

woraus also folgt

$$A\,(A) = v_A.$$

Durch $A\,(A)$ ist die Geschwindigkeit v_A der Größe und Richtung nach bestimmt; der Richtungssinn ist für das folgende ohne Bedeutung.

Zeichnen wir nun für eine beliebig gewählte Richtung von $O_E B$ den Plan der senkrechten Geschwindigkeiten mit dem Geschwindigkeitsnullpunkte in A, d. h. zeichnen wir das Dreieck $A\,a\,b$ mit den Seiten $A\,a = v_A$, $A\,b = v_B$, wobei $A\,a \perp A\,(A)$, $A\,b \perp O_E B$, dann ist durch die Seite $a\,b$ die der beliebigen Richtung $O_E B$ zugeordnete Richtung von $A\,B$ gegeben und daher im Schnitte der Linien $A\,B \parallel a\,b$ mit $O_E B$ auch der Gelenkpunkt B. Durch Aenderung der Richtung des Kurbelstrahles $O_E B$ ergibt sich bei gleich gehaltenem v_B als geometrischer Ort der Punkte B eine geschlossene Kurve K_1, die sich also einfach ermitteln läßt. (Verfahren von Grübler.)

Die einzelnen Punkte von K_1 werden im allgemeinen nicht die verlangte Beschleunigung b_B besitzen. Greifen wir einen beliebigen Punkt auf K_1 heraus, so gilt:

$$\overline{b_B} = \overline{b_A} + \overline{b_{BA}},$$

[1]) Schell, Theorie der Bewegung und der Kräfte, Bd. 1, S. 464.

worin b_{BA} die Beschleunigung der relativen Bewegung von B gegen A bedeutet und die oberen Querstriche gerichtete Strecken kennzeichnen. B führt gegen A eine Drehung um A aus; zerlegen wir die Beschleunigung b_{BA} dieser Drehung in ihre Normal- und Tangentialkomponente, setzen also

$$\overline{b_{BA}} = \overline{n_{BA}} + \overline{t_{BA}},$$

so gilt für n_{BA}, das in die Richtung $B \to A$ fällt, der Wert: $\frac{v_{BA}^2}{BA}$.

Dieser Wert ist einfach zu zeichnen: wir tragen $v_{BA} = a\,b$ in B senkrecht zu $A\,B$ auf, verbinden den so erhaltenen Punkt (B) mit A und fällen $(B)\,N$ senkrecht zu $A\,(B)$. Dann ist offenbar $B\,N = \frac{v_{BA}^2}{BA} = n_{BA}$.

Nun entwerfen wir in einer getrennten Figur einen Mohrschen Beschleunigungsplan mit dem Nullpunkte π, indem wir $\pi\,\alpha = \overline{b_A}$ und $\alpha\,(\alpha) = n_{BA}$ auftragen; dann muß der Beschleunigungspunkt β, d. i. der Endpunkt des in π angesetzten Beschleunigungsvektors b_B auf der in (α) zu $\alpha\,(\alpha)$ errichteten Normalen liegen. Einen zweiten Ort für β ergibt folgende Ueberlegung. Da der Beschleunigungspol P_E für die momentane Bewegung der Ebene E, der auch der Punkt B angehört, bekannt ist, so kann für die Beschleunigung b_B auch entsprechend der Eigenschaft des Beschleunigungspoles gesetzt werden.

$$\overline{b_B} = \overline{\nu_B} + \overline{\tau_B},$$

worin $\nu_B = \overline{BP}\,\omega_E^2$ die Richtung $B\,P$, $\tau_B = \overline{BP}\,\lambda_E$ die hierzu senkrechte Richtung besitzt und ω_E, λ_E die Winkelgeschwindigkeit bezw. Winkelbeschleunigung der momentanen Drehung der Ebene E bedeuten. Konstruieren wir ν_B in der gleich zu beschreibenden Weise, tragen dann von π ausgehend in Richtung BP die Größe ν_B auf, womit wir zu (β) gelangen und errichten dort die Senkrechte zu BP, so ist diese, wie ohne weiteres ersichtlich, ein zweiter geometrischer Ort für β, womit aber β gefunden ist. Durch

$$(\alpha)\,\beta = A\,B\,\lambda_{BA} = t_{BA}, \qquad (\beta)\,\beta = \tau_B = B\,P\,\lambda_E$$

sind nun auch die Winkelbeschleunigungen der Bewegung von $A\,B$ und der Ebene E bekannt. Der Wert $\nu_B = B\,P\,\omega_E^2$ wird am zweckmäßigsten wie folgt konstruiert. Man trägt in $B\perp$ zu $B\,O_E$ die Geschwindigkeit $v_B = A\,b$ an, gelangt hierbei zu $(B)_1$, zieht $(B)_1\,O_E$, macht $O_E\,l = B\,P_E$, zieht $l\,l_1 \perp O_E\,B$, bestimmt m aus $O_E\,m = l\,l_1$ und errichtet endlich in m die Senkrechte zu $O_E\,B$. Dann ist $m\,m_1 = \nu_B$. Denn bezeichnen wir den Winkel $B\,O_E\,(B)_1$ mit β, dann ist

$$\operatorname{tang}\,\beta = \frac{v_B}{B\,O_E} = \omega_E, \text{ somit } l\,l_1 = B\,P_E \operatorname{tang}\,\beta \text{ und}$$

$$m\,m_1 = \overline{l\,l_1} \operatorname{tang}\,\beta = B\,P_E \operatorname{tang}^2\,\beta = B\,P_E\,\omega_E^2 = \nu_B.$$

Die Zeichnung des Beschleunigungsplanes gestattet demnach, zu jedem auf der Kurve K_1 gewählten Gelenkpunkte B die zugehörige Beschleunigung der Größe und Richtung nach zu bestimmen. Tragen wir die so für eine Reihe von Punkten B erhaltenen b_B auf den zugehörigen Strahlen $O_E\,B$ auf, so ergibt sich als geometrischer Ort der Endpunkte das Polardiagramm K_2 mit dem Pole O_E. Nun zeichnen wir um O_E einen Kreis, dessen Halbmesser gleich der gegebenen Beschleunigung b_B ist. Dessen Schnittpunkte mit der Kurve K_2 geben, falls sie reell sind, die Lösung der Aufgabe; denn der Strahl von O_E nach einem dieser Schnittpunkte S trifft die Kurve K_1 in dem gesuchten Punkte B^*, der den hinsichtlich der Geschwindigkeit und Beschleunigung gestellten Forderungen entspricht.

Sind die Bewegungen der Ebenen ε und E Dauerdrehungen um die Punkte O_ε und O_E, die dann die festen Gelenke einer Doppelkurbel sind, dann vereinfachen sich die vorstehend beschriebenen Konstruktionen noch erheblich. Die Punkte P_ε, J_ε rücken nach O_ε, desgleichen liegt P_E in O_E. Die Ermittlung von ν_B kann nun gemäß der Formel $\nu_B = v_B^2 : B\,O_E$ in analoger Weise wie jene von n_{BA} erfolgen, da ν_B identisch wird mit der Zentripetalbeschleunigung von B gegen O_E.

Ist anstatt der Forderung bestimmter Geschwindigkeit des Gelenkes B die Bedingung einer gegebenen Koppellänge $A\,B$ zu erfüllen, dann ist die Kurve K_1 zu ersetzen durch einen um A mit dem Halbmesser $A\,B$ geschlagenen Kreis; aus diesem ist mit Hilfe der gezeigten Konstruktionen die Kurve K_2 abzuleiten. Die Schnitte dieser K_2-Kurve mit dem um O_E geschlagenen Kreis vom Halbmesser b_B liefern dann die Lösung

der Aufgabe; denn der Strahl von O_E nach einem dieser Schnittpunkte trifft den Koppelkreis mit dem Mittelpunkte A im gesuchten Gelenkpunkte B^*.

2. Sonderfall der Schubkurbel. Eine Abänderung des Verfahrens wird notwendig, wenn es sich um den Sonderfall der Schubkurbel handelt; dann liegen Drehpol und Beschleunigungspol der Ebene E unendlich fern. Wir stellen uns folgende Aufgabe: Der feste Drehpunkt O_ε und das Gelenk A in der Ebene ε seien nebst der Beschleunigung b_A gegeben; außerdem sei die Beschleunigung des Kreuzkopfes B und die Lage der Kreuzkopfführung F_1 bekannt. Zu suchen ist die diesen Angaben genügende Lage des Kreuzkopfes B^* auf der Führung, d. h. die Länge der Pleuelstange AB^* (Abb. 2).

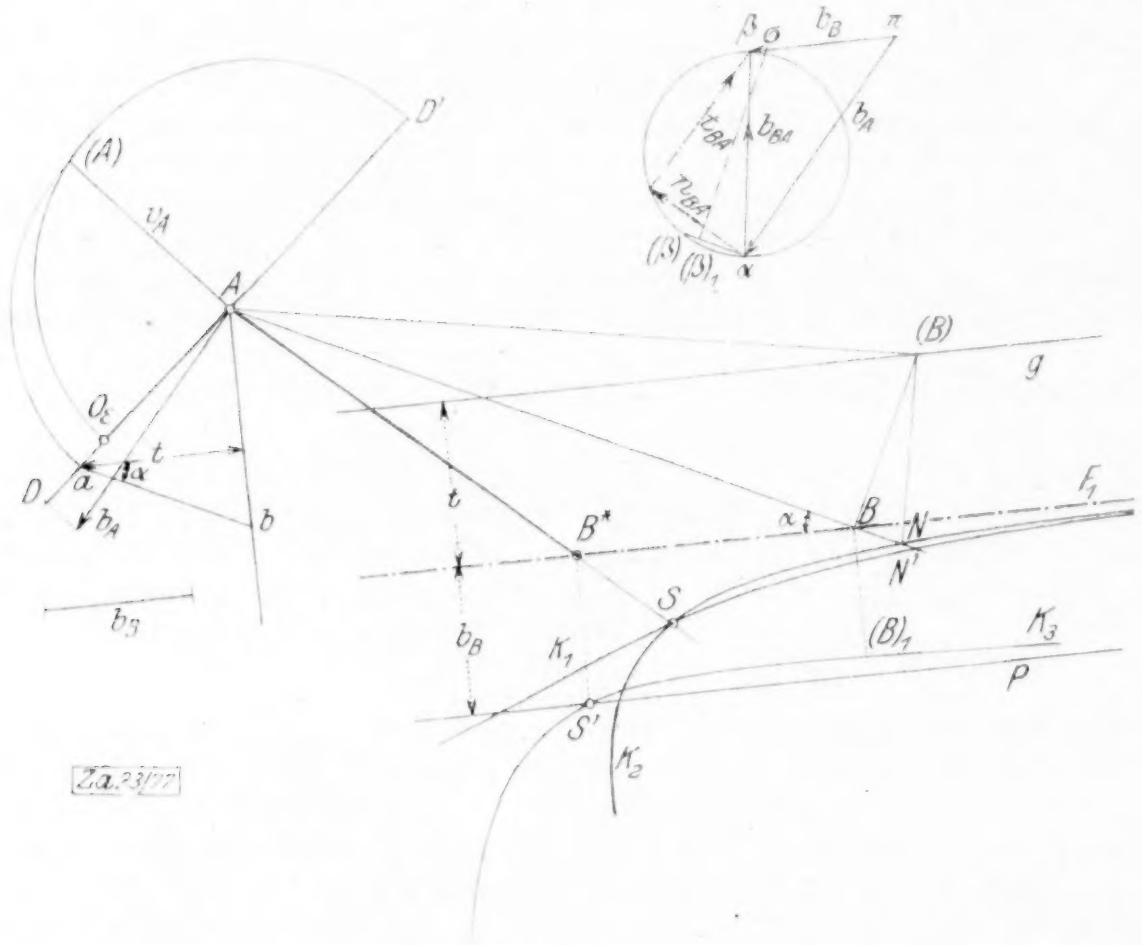


Abb. 2

Um zunächst v_A zu erhalten, projizieren wir wieder b_A auf $O_\varepsilon A$, machen $AD = AD'$, schlagen über $O_\varepsilon D'$ den Halbkreis und bringen ihn zum Schnitte mit der Richtung v_A; dann ist $A(A) = v_A$. Drehen wir v_A um 90°, dann ergibt sich auf $O_\varepsilon A$ in a der Geschwindigkeitspunkt des Gelenkes A für den Plan der senkrechten Geschwindigkeiten mit dem Geschwindigkeitsnullpunkt A. Da die Richtung von v_B durch die Kreuzkopfführung gegeben ist, so müssen alle unserer Aufgabe entsprechenden Geschwindigkeitspunkte b auf der durch A zu F_1 gezogenen Normalen liegen. Nehmen wir einen Punkt b auf dieser beliebig an, so schneidet die durch A zu $ab = v_{BA}$ gezogene Parallele aus F_1 den dieser Wahl von b entsprechenden Punkt B aus, der im allgemeinen nicht die verlangte Beschleunigung b_B besitzen wird. Tragen wir nun in einem Beschleunigungsplane vom Nullpunkte π ausgehend die gegebenen Beschleunigungen b_A und b_B auf, so liefert $\overline{\alpha\beta} = \overline{b_{BA}}$ die Beschleunigung der Relativbewegung von B gegen A. Wie früher zerlegen wir b_{BA} in den Normal- und Tangentialteil, setzen also $\overline{b_{BA}} = \overline{n_{BA}} + \overline{t_{BA}}$.

Die Normalbeschleunigung $n_{BA} = \frac{v^2_{BA}}{BA} = \frac{\overline{ab}^2}{BA}$ ergibt sich wieder, indem man $v_{BA} = ab$ von B aus auf der zu AB errichteten Senkrechten aufträgt und die Normale in (B) zu $A(B)$ mit AB in N zum Schnitte bringt; dann ist $BN = n_{BA}$. Wäre B richtig auf F_1 gewählt worden, dann müßte das erhaltene n_{BA} übereinstimmen mit jener Normalkomponente n_{BA}, die sich aus dem gezeichneten Beschleunigungsplan durch Zerlegung von b_{BA} in die Richtungen BA und senkrecht hierzu ergibt; d. i. mit $\alpha(\beta)$. Macht man $\alpha(\beta) = BN'$, und zwar für alle möglichen Lagen von B auf F_1, so erfüllen alle N' eine konchoidenähnliche Kurve K_1 mit der Asymptote F_1; ebenso liefern alle Punkte N eine Kurve K_2 mit F_1 als Asymptote, die rasch punktweise gezeichnet ist. Die Schnittpunkte (S) beider Kurven geben, wenn sie reell sind, die Lösung der Aufgabe; denn der Strahl von A nach S trifft F_1 in dem gesuchten Kreuzkopfmittel B^*. — Die Konstruktion der Kurven K_1 und K_2 vollzieht sich sehr bequem, wenn man beachtet, daß alle Punkte (β) auf dem um $\alpha\beta$ als Durchmesser beschriebenen Kreise liegen und daß ferner alle Punkte (B) auf einer zu F_1 im Abstande t parallelen Geraden g gelegen sind, wobei t die Länge des Lotes von a auf Ab bedeutet. Denn es ist $t = B(B)\cos\alpha = v_{BA}\cos\alpha = \overline{ab}\cos\alpha$, welcher Wert durch das bezeichnete Lot gegeben ist.

Die Punkte B^* können auch dadurch gewonnen werden, daß man die Beschleunigung des beliebig gewählten Punktes B ermittelt, indem man im Beschleunigungsplane $\overline{BN} = \alpha(\beta_1)$ macht und sodann die Senkrechte in (β_1) mit der Richtung b_B in σ zum Schnitte bringt. Dann stellt $\pi\sigma$ die Beschleunigung eines beliebigen Punktes B dar. Machen wir nun $\pi\sigma = B(B_1)$, so erfüllen alle Punkte (B_1) eine Kurve K_3, deren Schnitte S' mit der im Abstande b_B zu F_1 gezogenen Parallelen P die Lösung der Aufgabe liefern; denn die Projektion von S' auf F_1 gibt B^*.

Ist die Führung F_1 nur der Richtung, nicht aber der Lage nach gegeben, so kann dem momentanen Bewegungszustande der Schubkurbel neben der Forderung bestimmter Kreuzkopfbeschleunigung noch eine weitere Bedingung auferlegt worden, etwa die einer bestimmten Geschwindigkeit von B^*. Damit gelangen wir wieder zu der unter **1** behandelten allgemeinen Aufgabe, jedoch versondert für die Schubkurbel. Die Lösung ist nach dem Vorstehenden nun leicht zu gewinnen: Denken wir uns nämlich die Punkte B^* für eine ganze Reihe zueinander paralleler Führungen $F_1 F_2 \ldots$ in der eben beschriebenen einfachen Art bestimmt, so erfüllen sie eine Kurve K^*. Ist v_B gegeben, dann liefert der Plan der senkrechten Geschwindigkeiten in $a\,b$ die zugehörige Koppelrichtung; die Schnitte der durch A zu ab gezogenen Parallelen mit der Kurve K^* geben die gesuchten Kreuzkopflagen. Ist anstatt der Geschwindigkeitsforderung eine bestimmte Länge der Pleuelstange $A\,B$ vorgeschrieben, so liegen die entsprechenden Punkte B in den Schnittpunkten der Kurve K^* mit dem um A geschlagenen Kreise vom gegebenen Halbmesser AB.

Bei der wiederholten Konstruktion der Kurven K_1 und K_2, die zur Ermittlung von K^* notwendig ist, kann folgende Bemerkung nützlich sein: Seien K_1 und K_2 für die Lage F_1 der Führung bestimmt und sollen nun die entsprechenden Kurven für eine neue Lage $F_2 \parallel F_1$ entwickelt werden, so besteht wegen $B_1 N_1 = \frac{\overline{v_{BA}}^2}{B_1 A}$; $B_2 N_2 = \frac{\overline{v_{BA}}^2}{B_2 A}$ die Beziehung:

$$B_2 N_2 = \frac{B_1 A}{B_2 A} B_1 N_1 = \frac{p_1}{p_2} B_1 N_1,$$

worin $p_1 p_2$ die von A auf $F_1 F_2$ gefällten Lote bedeuten. Mit Hilfe eines auf das Verhältnis $p_1 : p_2$ eingestellten Reduktionszirkels sind also die Punkte N_2 aus N_1 ohne weiteres zu erhalten. Die Punkte N_2' ergeben sich sofort aus $B_1 N_1' = B_2 N_2'$ durch bloße Streckenübertragung.

3. Endlich verschiedene Lagen der Ebenen ε und E. Nun soll noch folgende Aufgabe besprochen werden: Es seien zwei endlich verschiedene Lagen zweier Ebenen ε und E einander zugeordnet; diese Ebenen sollen durch eine dritte Ebene in den Gelenken A und B, von denen A beliebig zu wählen ist, derart verbunden werden, daß bei gegebener Größe und Richtung von b_A in einer der beiden Lagen die Beschleunigung von B eine bestimmte Größe erreicht. Drehpole und Beschleunigungspole der augenblicklichen Bewegung in einer der zugeordneten Lagen von ε und E sind gegeben, z. B. für die Lage 1. Zu suchen ist die Lage des Gelenkes B. Die Lösung erfolgt in engstem Anschlusse an die in (**1**) gegebene Methode. An die Stelle der Kurve K_1, die dort auf Grund der Forderung bestimmter Geschwindigkeit v_B als geometrischer Ort für die Gelenkpunkte B entwickelt werden konnte, tritt hier die sogenannte Mittelsenkrechte, d. i. eine Gerade, die auf Grund der Zuordnung zweier endlich verschiedenen Lagen der beiden Ebenen als geometrischer Ort der Punkte B leicht zu konstruieren ist[1]). Nun werden für eine Reihe von Punkten der Mittelsenkrechten nach dem in **1** beschriebenen Verfahren die Beschleunigungen gezeichnet und vom Drehpole O_E auf den Strahlen $O_E B$ aufgetragen. Das so erhaltene Polardiagramm wird mit dem um O_E geschlagenen Kreise, dessen Halbmesser der gegebenen Beschleunigung b_B gleich ist, zum Schnitte gebracht; die Verbindungen der Schnittpunkte mit O_E schneiden aus der Mittelsenkrechten die gesuchten Gelenkpunkte B aus.

Unter Heranziehung der von H. Alt[2]) gewonnenen Ergebnisse lassen sich auch jene Fälle behandeln, bei welchen die Gelenkstellen A und B auszumitteln sind, wenn drei und vier Lagen der Ebenen ε und E einander zugeordnet sein sollen. Im ersten Falle kann dann noch über die Verhältnisse der Winkelgeschwindigkeiten und -Beschleunigungen in einer der zugeordneten Lagen frei verfügt werden, im letzteren Falle

[1]) Getriebelehre von Grübler, S. 107 und 108.
[2]) loc. cit. Anm. 3, S. 217.

nur mehr über eines der beiden Verhältnisse; freilich werden die erforderlichen Konstruktionen hier schon ziemlich mühsam. Erfolgt schließlich die Verbindung der beiden Ebenen ε, E durch ein höheres Elementenpaar, dann ergibt sich ein Fragenkomplex, der in einer späteren Mitteilung seine Bearbeitung finden soll.

4. Begründung der Konstruktion von 1. Nun sei noch die in **1** übergangene Begründung für die Ermittlung des Wendepoles gegeben. Bekannt sei von einer ebenen Bewegung der Drehpol O, Beschleunigungspol P und die Beschleunigung b_A eines Systempunktes A; gesucht wird der Wendepol J, Abb. 3. Die Verbindungslinie PA schließt mit b_A den Beschleunigungswinkel φ ein; es ist $\operatorname{tang}\varphi = \frac{\lambda}{\omega^2}$, wo ω und λ die Winkelgeschwindigkeit und -Beschleunigung der momentanen Bewegung bedeuten. Der Wendepol J liegt auf der Polbahnnormalen, die bekanntlich mit PO den Winkel φ einschließt. Verlängert man also b_A bis zum Schnitte x mit dem über OPA geschlagenen Kreise, dann liefert somit xO die Polbahnnormale. Da aber $\sphericalangle JPO$ ein rechter sein muß, so liegt der Wendepol J im Schnitte von xO mit der in P auf PO errichteten Normalen. Im Anschlusse hieran möge noch eine Konstruktion mitgeteilt werden, die Verwendung finden kann, wenn in den behandelten Aufgaben anstatt der Beschleunigungspole die Wendepole gegeben sind. Dann wird es notwendig, aus O, b_A und J den Beschleunigungspol zu konstruieren. Aus Abb. 3 entnimmt man, daß P als Schnitt des Umkreises des Dreieckes OAx und des Halbkreises über OJ zu gewinnen ist.

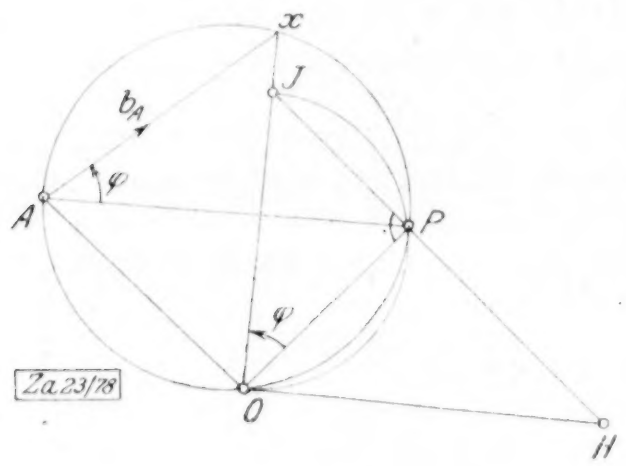


Abb. 3

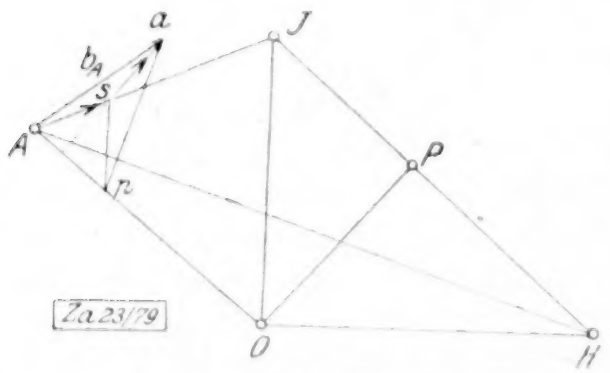


Abb. 4

Eine zweite vollständig lineare Konstruktion ist die folgende: Man ziehe (Abb. 4) $as \perp AO$ bis zum Schnitte s mit AJ, ferner $sp \parallel OJ$ bis zum Schnitte mit AO, dann ist der Tangentialpol H als Schnitt der durch A zu ap gezogenen Senkrechten mit der Polbahntangente ($OH \perp OJ$) gegeben. Der Beschleunigungspol P ist der Fußpunkt des von O auf HJ gefällten Lotes[1]). Der Beweis hierfür ist einfach zu erbringen. Zerlegen wir b_A nach Grübler in die Wende- und Triebbeschleunigung b_W und b_ε, so ist $\overline{b_A} = \overline{b_W} + \overline{b_\varepsilon}$, worin $b_W = AJ \cdot \omega^2$ in Richtung von AJ, $b_\varepsilon = AO \cdot \lambda$ senkrecht zu AO ist. Daher ist in Abb. 4:

$$b_W = As, \qquad b_\varepsilon = sa.$$

Andererseits kann aber die Beschleunigung b_A, wie Schell[2]) gezeigt hat, zerlegt werden in

$$\overline{b_A} = \overline{b_1} + \overline{b_2},$$

wobei

$$b_1 = AO \cdot \omega^2 \text{ in Richtung von } AO, \qquad b_2 = AH \cdot \lambda \text{ senkrecht zu } AH$$

zu nehmen ist. Da $b_W = As$ ist und $b_W : b_1 = AJ : AO$ sein muß, so ergibt sich zufolge der Proportion: $As : Ap = AJ : AO$ die Beziehung:

$$b_1 = Ap.$$

Dann muß aber $pa = b_2$ sein und diese Komponente steht nach Obigem senkrecht zu AH; damit ist der Strahl AH vollständig bestimmt und der Punkt H selbst durch den Schnitt mit der Polbahntangente. Da P auf HJ liegen und der Winkel JPO ein rechter sein muß, so ist P der Fußpunkt des Lotes von O auf HJ. 213

[1]) Eine andere rein lineare Konstruktion des Beschleunigungspoles aus den gegebenen Bestimmungsstücken stammt von F. Wittenbauer: Der Beschleunigungszustand kinem. Ketten. Civilingenieur 1896.

[2]) Schell, Theorie der Bewegung und der Kräfte, S. 446, Bd. I.

Einführung in die mathematische Grenznutzentheorie.

Von **A. P. BOCK** in Brünn.

Es sei zunächst unsere Aufgabe, den Leser in das grundlegende Kapitel der mathematischen Wirtschaftslehre einzuführen, das man gewöhnlich als die »Grenznutzentheorie« bezeichnet. Wir wollen dabei eine Darstellung wählen, die dem Ingenieur und dem Mathematiker näher liegt, als jene der Volkswirtschaftler Jevons, Leon Walras, Marshall, Pareto u. a., die sich allzu abstrakter Begriffsbildungen bedienten. Wir werden auf diese Weise die Möglichkeit gewinnen, gewisse Unklarheiten zu beseitigen, und manche unzulässigen Verallgemeinerungen als solche zu kennzeichnen, die bisher zu Irrtümern geführt haben.

Voraussetzung unserer Ueberlegungen ist, daß wir zur Messung des wirtschaftlichen Wertes eine Maßstabeinheit besitzen, die wir mit genügender Genauigkeit als eine absolute (zeitlich und örtlich unveränderliche) Einheit betrachten können. Die praktisch übliche Werteinheit, eine bestimmte Menge Edelmetalls, entspricht dieser Voraussetzung allerdings nicht ganz. Aber wir sind mit Hilfe gewisser Indexziffern in der Lage, die Geldziffern auf Ziffern in »Indexwerteinheiten« umzurechnen, und die Indexwerteinheit nähert sich praktisch mit genügender Genauigkeit der von uns vorausgesetzten absoluten Werteinheit.

1. Produktions- und Nutzeneffekt. Wir betrachten einen geschlossenen wirtschaftlichen Betrieb (etwa eine Rohzuckerfabrik), wobei wir annehmen, daß er sein Entwicklungsstadium bereits hinter sich habe, d. h. daß eine Erweiterung der Betriebsanlage (etwa mit Rücksicht auf den Antransport der Rübe) auf absehbare Zeit nicht mehr in Frage kommt. Der Nutzen (Reingewinn), den dieser Betrieb in der Zeiteinheit abwirft, sei in absoluten Werteinheiten gemessen mit $n' = \frac{dn}{dt}$ bezeichnet, so daß n den von irgend einem Anfangszeitpunkt bis zur Zeit t aufsummierten Reingewinn bedeutet. Hierbei ist der Differentialquotient praktisch durch einen geeigneten Differenzenquotienten zu ersetzen. Es ist häufig (wie auch in unserem Beispiel der Zuckerfabrik) mit Rücksicht auf die Jahresperiodizität der Erzeugung empfehlenswert, ein Jahr als Zeitintervall zu wählen. Nehmen wir tatsächlich das Jahr als Zeiteinheit, so stellt n' den Jahresnutzen, Jahresgewinn dar. Die Erfahrung lehrt nun, daß dieser Jahresnutzen eine Funktion der Jahresproduktion an Rohzucker ist. Wenn wir diese Produktion in Gewichtseinheiten messen und analog (wie früher den Jahresgewinn) mit $q' = \frac{dq}{dt}$ bezeichnen, so können wir diese Funktion durch

$$n' = f(q') \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (0)$$

ausdrücken. Ihre graphische Darstellung im Koordinatensystem n', q' nennen wir die Nutzeneffektlinie. Mit Rücksicht darauf, daß q bei den meisten Gütern auch in Kalorien (bei Zucker etwa in Nährkalorien), also in Energieeinheiten gemessen werden könnte, erscheint für $q' = \frac{dq}{dt}$ auch die Bezeichnung »Produktionseffekt« und analog für $n' = \frac{dn}{dt}$ die Bezeichnung Nutz- oder (um Wortverwechslungen zu vermeiden) »Nutzeneffekt« berechtigt [1]).

Die Erfahrung lehrt weiter, daß die Funktion $f(q')$ keineswegs, und zwar auch nicht näherungsweise, linear verläuft, sondern im allgemeinen gewisse charakteristische Krümmungen aufweist, die man am besten an der Hand der graphischen Darstellung erklärt. (Abb. 1.) Wenn der Betrieb gänzlich still steht, also $q' = 0$ ist, muß n' eine negative Größe sein, denn die Erhaltung des Betriebes verursacht Spesen, so daß wir es hier anstatt mit einem Jahresreingewinn, mit einem Jahresdefizit zu tun haben. Bei einem sehr kleinen Produktionseffekt kann sich dieses Defizit noch erhöhen, so daß die Kurve der Funktion $f(q')$ zunächst bei steigendem q' noch fällt. Aber in einem Punkte P_1 der Kurve wird diese ihr Minimum erreichen und weiterhin ansteigen. Im Punkte P_2 erreicht die Ordinate der Kurve wieder die gleiche Größe wie in der Ordinatenachse,

[1]) Man beachte den Unterschied zwischen den Begriffen des Nutzens (n) und des Nutzeneffektes (n') dieser Unterschied wird bei den eingangs erwähnten Autoren vielfach verwischt.

woraus ersichtlich ist, daß unter einem Produktionseffekt q'_{min}, welcher dem Punkte P_2 entspricht, überhaupt keine Produktion bestehen kann und der Betrieb stillgelegt werden muß. Vom Punkte P_2 an steigt die Kurve weiter und zwar zunächst mit positiver Krümmung gegen die Abszissenachse, bis sie etwa im Punkte P_3 an einen Wendepunkt gelangt. Von da ab steigt sie zwar noch weiter bis zum Punkte P_4, aber nunmehr mit negativer Krümmung gegen die Abszissenachse. Im Punkte P_4 erreicht sie ihr Maximum, d. h. eine weitere Forcierung der Produktion, eine weitere Erhöhung des Produktionseffektes wäre unrentabel. Der Verlauf der Kurve ist nichts anderes als die graphische Darstellung dessen, was man als das Gesetz des »gleichbleibenden, abnehmenden und zunehmenden Ertrages« bezeichnet. Es ist hier nur notwendig zu sagen, daß man unter »Ertrag« den Differentialquotienten des Nutzeneffektes nach dem Produktionseffekt, also die Größe $\frac{dn'}{dq'}$ zu verstehen hat.

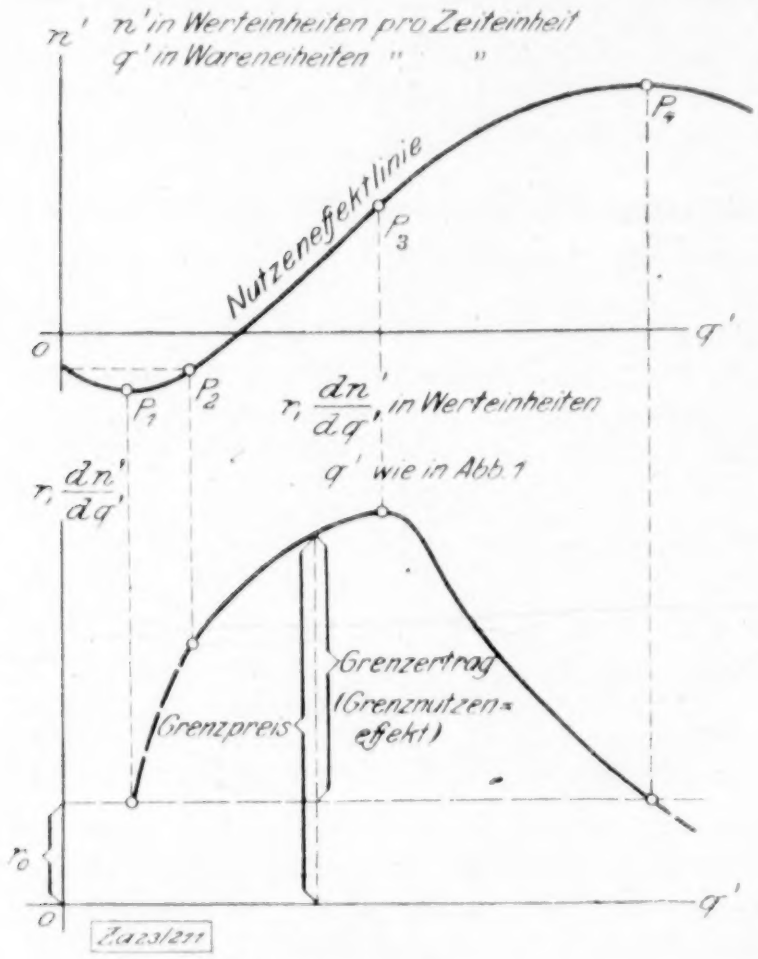


Abb. 1 und 2

Die Bezeichnung »Ertrag« ist zum mindesten in der deutschen Sprache an dieser Stelle nicht sehr glücklich, denn im Deutschen sind Ertrag und Nutzen schlechtweg gleichbedeutend. Hier handelt es sich aber um den (Jahres-)Ertrag der letzten Einheit des Produktionseffektes, und dieser ist gemeint, wenn wir künftig von »Ertrag« schlechtweg sprechen, um nicht neue Bezeichnungen einführen zu müssen. Wenn nun etwa Marshall von Betrieben mit »gleichbleibendem Ertrag« spricht, so meint er solche Betriebe, bei denen unsere Kurve im Bereiche der praktischen Verhältnisse angenähert linear verläuft, mithin $\frac{dn'}{dq'} = \text{konst.}$ gesetzt werden kann. Spricht er von Betrieben mit »fallendem Ertrag«, so meint er solche, bei denen praktisch nur jener Teil unserer Kurve in Frage kommt, der zwischen den Punkten P_3 und P_4 liegt, d. h. daß $\frac{dn'}{dq'}$ eine mit wachsendem q' fallende Größe, bezw. $\frac{d^2n'}{dq'^2} < 0$ ist. Spricht er endlich von Betrieben mit »steigendem Ertrag«, so meint er solche, bei denen im praktischen Bereiche $\frac{dn'}{dq'}$ eine mit wachsendem q' steigende Größe, also $\frac{d^2n'}{dq'^2} > 0$ ist. Der letzte Fall bietet der Theorie große Schwierigkeiten, es läßt sich aber zeigen, daß er nur für solche Betriebe gilt, die sich noch im Entwicklungsstadium befinden, sich also in ihrer Anlage noch vergrößern können. Für manche industrielle Betriebe liegt der Wendepunkt P_3 erst bei einem sehr großen Produktionseffekt, wie etwa für die Fordsche Kraftwagenindustrie, und es ist klar, daß im Zeitalter einer stürmischen technischen Entwicklung sich viele, namentlich industrielle Betriebe in diesem Stadium befinden werden. Ihre Anzahl wird um so mehr abnehmen, je mehr sich die Epoche der stürmischen technischen Entwicklung ihrem Ende nähert — was allem Anscheine nach derzeit schon zutrifft — und wir haben es heute bereits bei den meisten älteren Betrieben, vor allem den landwirtschaftlichen, durchwegs mit abnehmendem Ertrage zu tun. Die Grenznutzentheorie, welche vom subjektiven Konsum und nicht von der Produktion ausging, ließ nun zunächst den Fall des steigenden Ertrages beiseite und nahm an, daß im Bereiche ihrer Ueberlegungen nur das Gesetz vom »fallenden Ertrage« gelten solle.

2. Der Begriff des Grenznutzens. Es ist nach dem Gesagten nicht schwer, nun ohne Verwendung subjektiver Wertbegriffe, also auf dem objektiven Wege der Betriebsrentabilität zum Begriffe des Grenznutzens zu gelangen. Wenn wir beachten, daß in unserem Beispiele der Produktionseffekt in Gewichtseinheiten Rohzucker gemessen erscheint und daß dieser Produktionseffekt — gleichen Zuckergehalt der Rübe voraus-

gesetzt[1]) — proportional sein muß zur Gewichtsmenge der jährlich verbrauchten Zuckerrübe, also zum Verbrauchseffekt an Rübe, so erkennen wir, daß es nur von der Wahl des Abszissenmaßstabes abhängt, ob wir unter q' den Produktionseffekt an Rohzucker oder den Verbrauchseffekt an Rübe zu verstehen haben. Wenn q' den Verbrauchseffekt an Rübe bedeutet, so wird es einen bestimmten Verbrauchseffekt geben, bei dem es sich nicht mehr lohnen würde, noch Rübe zuzukaufen, und dieser Verbrauchseffekt q_4' ergibt sich für den Punkt P_4 unserer Kurve, also für die Bedingung $\frac{dn'}{dq'} = 0$. Beachten wir weiter, daß unsere Kurve nur bestimmt sein kann, wenn der Rübenpreis r_0, die Kosten der Fabrikation und die Preise für Rohzucker sowie für die Abfallprodukte gegeben sind, mithin diese Größen als Konstante auftreten, so sehen wir leicht ein, daß wir bei einem beliebigen Verbrauchseffekt $q' < q_4'$ einen höheren Rübenpreis als r_0 für eine noch zuzukaufende Menge dq' bezahlen könnten. Bezeichnen wir diesen Rübenpreis mit r und beachten wir, daß seine obere Grenze durch die Bedingung $(r - r_0)\, dq' \leqq dn'$ gegeben ist, so erhalten wir daraus mit $r = r_0 + \frac{dn'}{dq'}$ den Grenzpreis, den wir für die Gewichtseinheit der noch zuzukaufenden Menge dq' bezahlen könnten, also den tatsächlichen Rübenpreis plus dem Grenzertrage, den uns die Gewichtseinheit der Menge dq' gewähren kann. Wir sehen wieder, daß das Wort Grenznutzen ebenfalls unglücklich gewählt wurde und besser durch das Wort Grenzpreis[2]) zu ersetzen wäre, weil der Preis schlechtweg heute allgemein als Preis der Gewichtseinheit gilt, Nutzen schlechtweg aber nicht auf eine Gewichtseinheit bezogen erscheint. Wir erhalten somit die Linie der Grenzpreise sehr einfach aus der Linie des Nutzeneffektes, indem wir zur Konstanten r_0 den jeweiligen Differentialquotienten $\frac{dn'}{dq'}$ der Nutzeneffektlinie hinzufügen, wie dies aus Abb. 2 ersichtlich ist. Bis zum Wendepunkt der Nutzeneffektlinie P_3 steigt der Grenzpreis, weiterhin fällt er; für den letzteren Bereich gilt somit der erste Satz der Grenznutzentheorie

$$\frac{dr}{dq'} = \frac{d^2n'}{dq'^2} < 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1),$$

der in Worten besagt, daß der Grenzpreis mit steigendem Verbrauchseffekt fällt.

3. Fall mehrerer Variablen. Nun können wir ohne Schwierigkeit verallgemeinern. Denken wir daran, daß etwa beim Eisenhüttenprozeß nicht der Verbrauchseffekt von einer Erzart, sondern die Verbrauchseffekte q_a', q_b', q_c' ... verschiedener Erzarten a, b, c ... in Frage kommen, wobei wir die Mischung, ohne die Gesamtkosten der Erzanschaffung zu ändern, bekanntlich innerhalb gewisser Grenzen variieren können. Der Nutzeneffekt wird dann eine Funktion der Verbrauchseffekte q_a', q_b' q_c' ... sein, was

$$n' = F(q_a', q_b', q_c' \ldots) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

geschrieben werden kann. Sind p_a, p_b, p_c ... die Preise für die Gewichtseinheiten der verschiedenen Erzarten, so gibt die Bedingung, daß durch Variation der Mischung die Erzanschaffungskosten nicht wachsen sollen, die Gleichung

$$p_a\, dq_a' + p_b\, dq_b' + p_c\, dq_c' + \ldots = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3).$$

Weiters liefert die Bedingung $dn' = 0$

$$\frac{\partial F}{\partial q_a'} dq_a' + \frac{\partial F}{\partial q_b'} dq_b' + \frac{\partial F}{\partial q_c'} dq_c' + \ldots = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4).$$

Beide Gleichungen können für beliebige dq' nur bestehen, wenn die Beziehungen

$$\frac{\partial F}{\partial q_a'} = \alpha p_a; \quad \frac{\partial F}{\partial q_b'} = \alpha p_b; \quad \frac{\partial F}{\partial q_c'} = \alpha p_c; \text{ usw.} \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

---

[1]) Von der Schwierigkeit des verschiedenen Zuckergehaltes der Rübe wird abgesehen, weil sich diese Schwierigkeit durch Reduzierung der Rübengewichtsziffern auf Grund des Zuckergehaltes praktisch leicht beheben läßt.

[2]) Manche Theoretiker verstehen nämlich unter dem Grenznutzen den Grenzpreis der Nachfrage; wir halten es für besser, die Differenz zwischen Grenzpreis und tatsächlichem Marktpreis beim Einkauf der Rohstoffe bezw. die Differenz zwischen dem Verkaufspreis der Fertigware und den Selbstkosten (beides pro Wareneinheit) als Grenznutzen oder als Grenznutzeneffekt oder als Grenzertrag zu bezeichnen, weil dies ein logisch gsschlosseneres System ergibt.

gelten, wobei α einen bestimmten Faktor bezeichnet. Da die Differentialgleichungen (3) und (4) nach ihrem Charakter eine Schar von Niveauflächen darstellen, spricht man hier von einem Grenzpreisniveau. Da man die Gleichung (4) auch als eine Variationsbedingung bezüglich der zu variierenden Mengendifferentiale $d\,q_a'$, $d\,q_b'$, $d\,q_c'$ ... auffassen kann, so ist es gestattet, in dieser Gleichung alle Differentiale $d\,q_a'$, $d\,q_b'$ $d\,q_c'$ ... bis auf zwei beliebige, gleich Null zu setzen, woraus sich die Beziehungen

$$\frac{\partial F}{\partial q_a'} d\,q_a' = \frac{\partial F}{\partial q_b'} d\,q_b' = \frac{\partial F}{\partial q_c'} d\,q_c' = \ldots \quad (6)\,[1]$$

ergeben, welche den zweiten Grenznutzensatz mathematisch darstellen.

In Verbindung mit den Gleichungen (3) und (5) ergibt sich dann, daß

$$\left(\frac{\partial F}{\partial q_a'} + p_a\right) d\,q_a' = \left(\frac{\partial F}{\partial q_b'} + p_b\right) d\,q_b' = \ldots = d\,w \text{ (Werteinheiten)} \quad (7)\,[1]$$

sein müssen, wobei die eingeklammerten Größen in (7) Grenzpreise darstellen, die beim Mehrverbrauch der letzten Teilmengen $d\,q'$ gezahlt werden könnten. Diese Gleichungen sind Wertgleichungen und besagen daher, daß die letzten Werteinheiten, welche im Rohstoffeinkauf in der Zeiteinheit ausgegeben werden, bei jedem Rohstoff den gleichen Grenzertrag (Grenznutzeneffekt) liefern müssen, natürlich auf dem Wege der Rohstoffverarbeitung; α Werteinheiten sind der Ertrag jeder letzten Werteinheit, die für Rohstoffe ausgegeben wird.

Die Gleichungen (3) bis (6) gelten selbstverständlich auch dann, wenn

$$F(q_a', q_b', q_c' \ldots) = f_1(q_a') + f_2(q_b') + f_3(q_c') + \ldots \quad (8)$$

ist, d. h. wenn der Nutzeneffekt jedes einzelnen Rohstoffes von den Verbrauchseffekten der übrigen Rohstoffe unabhängig ist, ein Spezialfall, der sich auch ohne höhere Mathematik verständlich machen läßt, wie dies von Menger, Liefmann u. a. durch ein Zahlenschema versucht worden ist. Praktisch aber trifft dieser Spezialfall nur selten zu.

Aus dem zweiten Grenznutzensatz (7) folgt weiter, daß bei freiem Markte die größte Wirtschaftlichkeit der Hüttenbetriebe, im Wege der Nachfrage nach Erzen, dazu führen muß, daß die einzelnen Erzarten zu jedem Zeitpunkte in ganz bestimmten Preisrelationen zueinander stehen; die Einheitspreise der verschiedenen Erzarten müssen auf einer und derselben Grenzpreisniveaufläche liegen.

Wenn nun ein Betrieb, beispielsweise wieder eine Zuckerfabrik, verschiedene Haupt- und Nebenprodukte, beispielsweise Rohzucker, Melasse, Rübenschnitzel usw. erzeugt, so lassen sich beim gleichen Verbrauch an Rohstoff (Rübe) die Produktionseffekte an Haupt- und Nebenprodukten bekanntlich bis zu einem gewissen Grade variieren; wenn man mit Aufwand verschiedener technischer Mittel mehr Rohrzucker gewinnen kann, so wird dies auf Kosten der Nebenprodukte gehen. Wenn wir uns in Gleichung (2) die q_a', q_b', q_c' ... als Produktionseffekte der Haupt- und Nebenprodukte vorstellen, so können wir auch für diese Interpretation die gleiche Ableitung vornehmen, wie wir es bezüglich der früheren getan haben und kommen zu dem Schlusse: die letzten Werteinheiten, welche wir durch den Verkauf der letzten in der Zeiteinheit erzeugten Haupt- und Nebenprodukte, $d\,q_a'$, $d\,q_b'$, $d\,q_c'$ ... einehmen, müssen mit der gleichen Quote (α) [2] am Nutzeneffekt (Reingewinn) beteiligt sein [3].

Betrachtet man den konsumierenden Menschen als einen Betrieb, der Rohstoffe verarbeitet, und dessen Reingewinn (Nutzeneffekt) in einem »Genußeffekt« besteht, so kommt man zum gleichen Resultat unter der Voraussetzung, daß es für den Genußeffekt eine brauchbare Maßeinheit gibt. Hier aber verliert man sich in die Begriffe der subjektiven Wertschätzung und der Relativität der Genußeinheiten, was zu bedeutenden Schwierigkeiten führt und einer exakten Behandlung mannigfache Hindernisse in den Weg legt. Nichtsdestoweniger ist die Grenznutzenlehre gerade von dieser Seite her zuerst aufgestellt worden.

4. Veränderlichkeit mit der Zeit. Die Grenznutzentheorie setzt stillschweigend voraus, daß in den Gleichungen (0) und (2) die Größen q', q_a', q_b' q_c' ... zeitlich unveränderlich sind, denn nur in diesem Falle führt die Bedingung (4) auch zu einem Maximum von n, während n' ebenfalls als zeitlich unveränderlich anzusehen wäre.

---

[1]) In den Gleichungen (6) und (7) sind die Größen dq als absosute anzusehen.

[2]) α ist hier kleiner als 1.

[3]) Mit anderen Worten, auch die Preise der Fertigprodukte müssen auf einer Grenzpreisniveaufläche liegen.

Trifft diese Voraussetzung aber nicht zu, sind die Größen $q', q_a', q_b', q_c' \ldots$ beliebig wählbare Funktionen der Zeit, dann ist es nicht erlaubt, in der dargelegten Weise vorzugehen, sondern es wäre das Maximum des gesamten Zukunftsnutzens n, diskontiert auf die Gegenwart, zu suchen; es ergibt sich dann

$$n = \int_0^\infty \frac{n'}{(1+\zeta)^t}\, dt \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10),$$

worin $n' = F(t, q_a', q_b', q_c' \ldots)$ und ζ der Diskontierungszinsfuß ist, weshalb man auch

$$n = \int_0^\infty \Phi\,(t, q_a', q_b' q_c' \ldots)\, dt \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

schreiben kann, wobei die Lagrangeschen Bedingungen für ein Maximum n gelten:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{d}{dt}\frac{\partial n}{\partial q_a'} - \frac{\partial n}{\partial q_a} = 0 \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial n}{\partial q_b'} - \frac{\partial n}{\partial q_b} = 0 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12).$$

Es müßten also die Grundgleichungen jeder Planwirtschaft von der Art dieser Lagrangeschen Bedingungsgleichungen sein.

Man beachte, daß in Gleichung (11) die Funktion Φ eine zukünftige Abhängigkeit darstellt, welche nur roh geschätzt werden kann; allerdings ist ein in weiter Zukunftsferne liegender Schätzungsfehler hierbei wegen der Diskontierung von geringem Einfluß auf n. Immerhin sehen wir, daß nur, wer alle Zukunft kennt, ein vollkommener Oekonom sein könnte, während wir uns praktisch mit Annäherungen begnügen müssen. Die Annäherung wird um so besser sein, je stabiler und sicherer die wirtschaftliche Zukunft vor uns liegt, je weniger wir an unverhergesehene und unberechenbare Störungen denken müssen.

Die Grenznutzenlehre ist durch die Anwendung der mathematischen Symbolik in der Nationalökonomie gefunden worden und sie ist auch heute noch ohne diese Symbolik unverständlich. Die reinen Dialektiker in der Oekonomie konnten bisher nur den erwähnten Spezialfall zur Not bewältigen. Das Gebiet der Nationalökonomie gestattet eine noch weitergehende und sehr fruchtbare Anwendung dieser Symbolik, weshalb mathematische Vorkenntnisse für jeden Nationalökonomen zur Pflicht gemacht werden sollten, erfordert doch überdies schon das Verständnis der modernen Privatwirtschaft, der modernen Statistik und selbst der modernen Logik und Erkenntnistheorie notgedrungen diese Vorkenntnisse. 250

ZUSAMMENFASSENDE BERICHTE

Stabilitätsprobleme der Elastizitätstheorie.

Von **E. L. NICOLAI** in Petersburg.

Im Anschluß an den in Bd. 2, S. 292 bis 299 unter gleicher Ueberschrift erschienenen Bericht von Herrn H. Hencky seien noch einige Resultate, die sich auf eines der von Herrn Hencky besprochenen Probleme beziehen, hier kurz mitgeteilt. Es handelt sich um die Stabilität eines radial gedrückten Kreisringes oder Kreisbogens. Nachfolgende Ergebnisse entnehme ich, soweit nicht anderes angegeben ist, einer russischen Abhandlung, die von mir über diesen Gegenstand in den »Berichten des Petersburger Polytechnischen Instituts« Bd. 27 (1918) veröffentlicht wurde.

1. Stabilität des radial gedrückten Kreisringes in seiner Ebene. Es soll a den Radius des Kreisringes, B die Biegungssteifigkeit des Ringes in seiner Ebene sein; wir setzen voraus, daß die Ebene des Kreises für jeden seiner Punkte Biegungs-Haupt-

ebene ist. Dann ist bekanntlich die kritische Belastung (pro Längeneinheit der Mittellinie des Ringes), bei der Instabilität eintritt, nach M. Lévy:

$$P_c = 3\,\frac{B}{a^3}.$$

Diese Formel setzt voraus, daß der äußere Druck nach erfolgter Verzerrung des Ringes normal zu der verzerrten Mittellinie des Ringes bleibt. Soll der äußere Druck stets zum Mittelpunkt der ursprünglichen Kreisform des Ringes gerichtet bleiben, so bestimmt sich die kritische Belastung zu

$$P_c = \frac{9}{2}\,\frac{B}{a^3}.$$

2. Stabilität des radial gedrückten Kreisringes gegen räumliche Verzerrung. Es bezeichne A die Biegungssteifigkeit des Kreisringes in der Hauptebene normal zur Ebene des Kreises, C seine Drillungssteifigkeit; wir setzen $\frac{A}{C} = \lambda$. Nehmen wir an, daß die Richtung des äußeren Druckes nach Verzerrung des Ringes in der Hauptebene des verzerrten Ringes (die ursprünglich mit der Kreisebene zusammenfällt) bleibt. Instabilität (Achterbildung) erfolgt beim kritischen Drucke, der sich zu

$$P_c = 3\,\frac{A}{a^3}$$

berechnen läßt. Bleibt der äußere Druck stets parallel zur ursprünglichen Ebene des Kreises, so ist

$$P_c = \frac{9}{4+\lambda}\,\frac{A}{a^3}.$$

Soll endlich der Druck stets zum Mittelpunkte der ursprünglichen Kreisform des Ringes gerichtet bleiben, so wird

$$P_c = \frac{12}{4+\lambda}\,\frac{A}{a^3}\ ^{1}).$$

Nun wollen wir annehmen, daß der Kreisring sich in einem elastischen Medium befindet, so daß jeder Verrückung v normal zur Kreisebene ein elastischer Widerstand von der Größe cv entgegenwirkt. Dann sind kleine räumliche Verzerrungen des Kreisringes bei solchen Werten des äußeren Druckes möglich, die in der Formel

$$P = (n^2-1)\,\frac{A}{a^3} + \frac{n^2+\lambda}{n^2(n^2-1)}\,ac$$

enthalten sind, wo n eine beliebige ganze Zahl sein kann (und zwar ist es die Anzahl der Wellen in der verzerrten Mittellinie des Ringes); es ist hier vorausgesetzt, daß der äußere Druck stets in der Hauptebene des verzerrten Ringes bleibt. Der kleinstmögliche Wert von P, der dieser Formel entspricht, ist die kritische Belastung. Dieser Wert kann verschiedenen Werten von n entsprechen, je nach der Größe der Konstanten c; je größer diese Konstante, desto größer wird die Anzahl der Wellen in der Mittellinie des Ringes, die sich beim Kippen des Ringes bilden.

3. Stabilität des radial gedrückten Kreisbogens in seiner Ebene. Es bedeute 2Θ den Zentriwinkel des Kreisbogens. Ist der Bogen gelenkig gelagert, so ist bekanntlich unter der Voraussetzung, daß der äußere Druck normal zur verzerrten Mittellinie des Bogens bleibt, die kritische Belastung

$$P_c = \frac{B}{a^3}\left(\frac{\pi^2}{\Theta^2} - 1\right)\ ^{2}).$$

Für den eingespannten Bogen wird unter der nämlichen Voraussetzung

$$P_c = \frac{B}{a^3}(\alpha^2 - 1),$$

wo α die nächste über 1 gelegene Wurzel der Gleichung

$$\alpha\,\Theta\ \mathrm{ctg}\ \alpha\,\Theta = \Theta\ \mathrm{ctg}\ \Theta$$

---

[1]) Dieses Resultat wurde auch von H. Hencky abgeleitet: Kippsicherheit und Achterbildung an geschlossenen Kreisringen, diese Zeitschr. Bd. 1, S. 451.

[2]) Dieses Ergebnis findet sich bei E. Hurlbrink, Schiffbau 9, 1907 bis 1908, S. 640, S. Timoschenko, Stabilität elastischer Systeme, Kiew 1910, S. 66 (russisch), R. Mayer, Zeitschr. für Math. und Phys. 61, 1913, S. 318.

ist. Für einige Werte von Θ sind die zugehörigen Werte von α in folgender Tabelle niedergeschrieben:

Θ	30^0	60^0	90^0	120^0	150^0	180^0
α	8,621	4,375	3	2,364	2,066	2

4. Stabilität des radial gedrückten Kreisbogens bei räumlicher Verzerrung. Ist der Bogen gelenkig gelagert (die Achsen der Gelenkbolzen sollen mit den Endradien des Bogens zusammenfallen) und bleibt der äußere Druck stets in der Hauptebene des verzerrten Bogens, so berechnet sich der kritische Druck zu

$$P_c = \frac{A}{a^3}\left(\frac{\pi^2}{4\,\Theta^2} - 1\right), \quad \text{wenn } 0 < \Theta < \frac{\pi}{2},$$

und

$$P_c = \frac{A}{a^3}\left(\frac{\pi^2}{\Theta^2} - 1\right), \quad \text{wenn } \frac{\pi}{2} < \Theta < \pi.$$

Bleibt der äußere Druck stets parallel zur Ebene des unverzerrten Kreisbogens, so lauten die entsprechenden Formeln

$$P_c = \frac{A}{a^3}\,\frac{\left(\frac{\pi^2}{4\,\Theta^2} - 1\right)^2}{\frac{\pi^2}{4\,\Theta^2} + \lambda}, \quad \text{wenn } 0 < \Theta < \Theta_0,$$

und

$$P_c = \frac{A}{a^3}\,\frac{\left(\frac{\pi^2}{\Theta^2} - 1\right)^2}{\frac{\pi^2}{\Theta^2} + \lambda}, \quad \text{wenn } \Theta_0 < \Theta < \pi,$$

wo Θ_0 sich durch die Gleichung

$$\frac{\pi^2}{\Theta^2} = -\frac{5}{2}\lambda + \sqrt{\frac{25}{4}\lambda^2 + 8\lambda + 4}$$

bestimmen läßt.

Für den eingespannten Bogen ergibt sich unter Voraussetzung, daß der äußere Druck stets in der Hauptebene des verzerrten Bogens bleibt, der kritische Druck zu

$$P_c = \frac{A}{a^3}(\beta^2 - 1),$$

wo β die nächste über 1 gelegene Zahl ist, die einer der beiden Gleichungen

$$\left(1 + \frac{\lambda}{\beta^2}\right)\beta\Theta\,\mathrm{tg}\,\beta\Theta = (1+\lambda)\,\Theta\,\mathrm{tg}\,\Theta$$

$$\left(1 + \frac{\lambda}{\beta^2}\right)(\beta\Theta\,\mathrm{ctg}\,\beta\Theta - 1) = (1+\lambda)(\Theta\,\mathrm{ctg}\,\Theta - 1)$$

genügt.

Wollen wir wieder annehmen, daß der Bogen sich in einem elastischen Medium befindet, welches jeder Verrückung v normal zur Ebene des Kreisbogens einen elastischen Widerstand von der Größe cv entgegensetzt. Beschränken wir uns auf den Fall eines gelenkig gelagerten Bogens und eines äußeren Druckes, welcher stets in der Hauptebene des verzerrten Bogens bleibt, so sind kleine räumliche Verzerrungen des Bogens bei solchen Werten des äußeren Druckes möglich, die in der Formel

$$P = \frac{A}{a^3}\left(\frac{n^2\pi^2}{4\,\Theta^2} - 1\right) + ac\,\frac{\frac{n^2\pi^2}{4\,\Theta^2} + \lambda}{\frac{n^2\pi^2}{4\,\Theta^2}\left(\frac{n^2\pi^2}{4\,\Theta^2} - 1\right)}$$

enthalten sind. Der kleinstmögliche Wert von P (welcher verschiedenen Werten der ganzen positiven Zahl n entsprechen kann) ist die kritische Belastung. Dieses letzte Problem dürfte von einigem Interesse in Hinsicht auf Kipperscheinungen im Brückenbau sein.

Alle hier mitgeteilten Resultate lassen sich in einfacher Weise ableiten, indem man die Differentialgleichungen der kleinen Formänderungen des gedrückten Kreisringes bezw. Kreisbogens nach der Methode von Kirchhoff-Clebsch anschreibt und den kleinsten Wert des äußeren Druckes aufsucht, der mit einer kleinen Formänderung des Ringes bezw. Bogens verträglich ist.

KURZE AUSZÜGE

Praktische Analysis.

Verschärftes Verfahren der harmonischen Analyse. Das übliche Verfahren[1]) der angenäherten Berechnung der Koeffizienten einer Fourierreihe

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt) \quad (1),$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos nt \, dt,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin nt \, dt \quad (n = 0,1 \ldots)$$

besteht bekanntlich darin, daß man das Periodenintervall $(0, 2\pi)$ in m gleiche Teile teilt und anstelle der Integrale für a_n und b_n die Summen

$$\left.\begin{aligned} a_n' &= \frac{2}{m} \sum_{k=1}^{m} f_k \cos_{n,k}, \\ b_n' &= \frac{2}{m} \sum_{k=1}^{m} f_k \sin_{n,k} \quad (n = 0,1 \ldots \frac{m}{2} - 1) \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

setzt; $f_k, \cos_{nk}, \sin_{nk}$ sind dabei die Werte von $f(t)$, $\cos nt$, $\sin nt$ im Kten Teilpunkt. Man ersetzt dabei gewissermaßen die Funktionen $f(t)\cos nt$, $f(t)\sin nt$ durch m-stufige Treppenkurven. Davon ausgehend, daß bei diesem Verfahren der begangene Fehler nicht anschaulich ist, da nicht die Originalkurve $f(t)$ sondern $f(t)\sin nt$ resp. $f(t)\cos nt$ durch Treppen approximiert werden, gibt W. Dällenbach im Archiv für Elektrotechnik X. Bd., 1921, S. 277 bis 281 ein Verfahren an, das darin besteht, den Kurvenzug für $f(t)$ selbst, zunächst durch ein Polygon, sodann durch geeignet gewählte kubische Parabelbögen zu ersetzen. Beide Verfahren ergeben gegenüber dem ebengeschilderten einfach anzubringende Korrekturen.

Um den Gedankengang an dem ersten Verfahren des Verfassers zu skizzieren, schreiben wir an Stelle von (1) und (2)

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{nit}; \; i = \sqrt{-1}, \; c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n),$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n) \ldots (1')$$

$$c_n' = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} f_k e_{n,k} \ldots\ldots (2'),$$

wobei e_{nk} der Wert von e^{nit} im k^{ten} Teilpunkt ist. Mit der aus Abb. 1 ersichtlichen Bezeichnung ist im k^{ten} Teilintervall

$$f(t) = f(\vartheta) = f_{k-1} + (f_k - f_{k-1}) \frac{\vartheta}{\Theta} + \eta \quad (3),$$

dabei ist η die Abweichung der Originalkurve vom Polygonzug; und

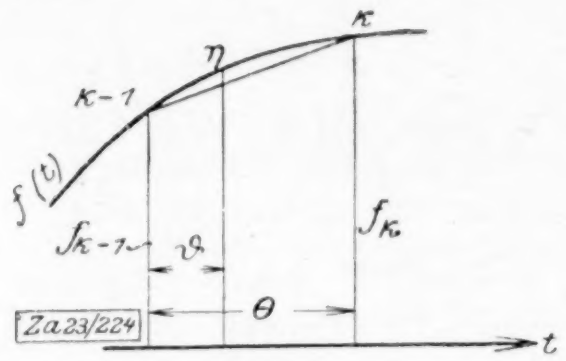


Abb. 1

Durch Ausrechnen des ersten unter dem Integralzeichen stehenden Gliedes und partielle Integration des zweiten ergibt sich bis auf den Rest R

$$c_n = \frac{m}{(2n\pi)^2} \sum_{k=1}^{m} (f_k - f_{k-1})(e_{nk} - e_{n,k-1});$$

ordnet man diese Summe nach den Funktionswerten f_k, so folgt

$$c_n = K c_n' + R \text{ mit } K = \left[\frac{\sin n\pi/m}{n\pi/m}\right]^2 \quad (4),$$

wobei c_n' der durch (2') definierte erste Näherungswert ist und für R (wegen $|e^{-nit}| = 1$) $R \leqq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\eta| \, dt = |\overline{\eta}|$ gilt, wobei $|\overline{\eta}|$ den über $(0,2\pi)$ erstreckten Mittelwert des absoluten Betrages der Abweichung des Polygonzuges von der Originalkurve bezeichnet. Es gilt also:

$$c_n \leqq K c_n' + |\overline{\eta}|; \; a_n \leqq K a_n' + |\overline{\eta}|; \; b_n \leqq K b_n' + |\overline{\eta}| \quad (5).$$

Verwendet man — ähnlich wie bei der Simpsonschen Regel — statt des Polygonzuges kubische Parabelbögen, so ergeben sich Formeln analog (5) mit anderm Korrektionsfaktor k:

$$c_n \leqq k c_n' + |\overline{\varepsilon}|; \quad a_n \leqq k a_n' + |\overline{\varepsilon}|; \quad b_n \leqq k b_n' + |\overline{\varepsilon}| \quad (6),$$

wobei $a_n' \, b_n' \, c_n'$ die gleichen durch (2') definierten Näherungswerte sind, $|\overline{\varepsilon}|$ den Mittelwert der absoluten Abweichung über $(0,2\pi)$ der Ersatzkurve von der Originalkurve bezeichnet und der — wieder nur von n und m abhängige — Faktor

$$k = \left[1 + \frac{2}{3}\left(\frac{\pi n}{m}\right)^2\right]\left[\frac{\sin \pi n/m}{\pi n/m}\right]^2 \ldots (6')$$

für die höheren Harmonischen schon ins Gewicht fällt. Für $m = 24$ sind die Werte von k bis zur 12. Harmonischen:

n	k	n	k	n	k	n	k
1	0,99993	4	0,98353	7	0,87654	10	0,63519
2	0,99888	5	0,96217	8	0,80970	11	0,53546
3	0,98453	6	0,92721	9	0,72816	12	0,43445

$$c_n = \sum_{k=1}^{m} e_{nk} + R = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{m} \left\{ \int_0^{\Theta} \left[f_{k-1} + (f_k - f_{k-1}) \frac{\vartheta}{\Theta} \right] e^{-in\Theta(k-1)+\vartheta} \, d\vartheta \right\} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \eta e^{-nit} \, dt.$$

[1]) C. Runge, Theorie und Praxis der Reihen, Sammlung Schubert, § 17.

Harmonische Analyse bei geeigneter Wahl der Funktionwerte. Eine Modifikation der üblichen Methode der harmonischen Analyse[1]) die bei gleicher Anzahl m der Teilpunkte »nur 70 vH der dort benötigten Arbeit« erfordert, teilt A. E. Clayton in »The Electrician« 1922, S. 176 bis 179 mit. Um den p^{ten} Koeffizienten a_p zu erhalten, rechnet man diesen zweimal, einmal — nach dem Rungeschen Schema — das a_p' unter Verwendung der Funktionswerte f_k in den Teilpunkten selbst[1]) einmal den gleichen Koeffizienten a_p'' nach der ältesten Methode von J. Perry unter Verwendung mittlerer Funktionswerte f_k im k^{ten} Intervall. Es zeigt sich, daß, wenn man beidemale unter Zugrundelegung von m Teilpunkten rechnet, $a_p', m + a_p'', m = 2\,a_p', 2m$, wird, d. h. durch Addition von a_p', und a_p'', gerechnet unter Zugrundelegung von m Teilpunkten, ergibt sich der Wert von a_p, den man nach Runge erhielte, wenn man $2m$ Teilpunkte benutzt hätte. Die Ableitung der vom Verf. zur Aufstellung dieser Beziehung verwandten Formeln findet sich im J. E. E. Journ. Vol. 59, 1921, S. 491 bis 510. Eine gleiche Beziehung wie für die cosinus-Glieder gilt für die sinus-Glieder. Da die Anzahl der nach Runges Schema erforderlichen Rechnungen proportional m^2 nach Perrys Schema proportional $2m^2$ angenommen werden kann, so ist nach Claytons Schema, der für $2m$ Teilpunkte erforderliche Rechenaufwand tatsächlich proportional $m^2 + 2m^2 = 3m^2$ anstelle von $4m^2$.

Tafeln zur harmonischen Analyse. Das von W. Lohmann neuerdings mitgeteilte[1]) Hermannsche Verfahren der harmonischen Analyse einer Funktion $f(x)$ von der Periode 2π macht für die Koeffizienten der Fourierreihe

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_1^\infty (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x) \qquad (1)$$

den in den numerischen Verfahren der harmonischen Analyse üblichen Ansatz — (die y_n sind $(2m)$ gegebene Funktionswerte —)

$$\left.\begin{aligned} a_\nu' &= \frac{1}{m}\sum_{r=1}^{2m} y_r \cos\frac{\nu\pi}{m}r; \quad b_\nu' = \frac{1}{m}\sum_{r=1}^{2m} y_r \sin\frac{\nu\pi}{m}r; \quad (\nu = 1, 2, \ldots m-1)\\ a_0' &= \frac{1}{m}\sum_{r=1}^{2m} y_r; \quad a_m' = \frac{1}{2m}\sum_{r=1}^{2m} y_r \cos r\pi = \frac{1}{2\pi}\sum_{r=1}^{2m}(-1)^r y_r \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (2).$$

Von den gleichen Formeln[2]) geht L. Zipperer in seinen »Tafeln zur harmonischen Analyse periodischer Kurven« Verlag J. Springer, Berlin 1922 aus und gibt — wieder ganz ähnlich dem Hermannschen Verfahren — ein aus »Grundtafel« und — als Ersatz der üblichen Schablonen — aus gewissen Koeffiziententafeln bestehendes Handwerkzeug zur mechanischen Durchführung der durch die Formeln (2) geforderten Rechenarbeit. Er teilt das Grundintervall in $2m = 24$ gleiche Teile (bei Hermann sind es 20 Teile) —; die von ihm daher zu verwendende Zahlentafel enthält die Werte von cos und sin der Vielfachen von 15^0 (statt 18^0 bei Lohmann); sie weist außer der 1 natürlich 5 charakteristische Zahlwerte (gegen 4 bei Lohmann) auf. Die $24 \cdot 12$ Produkte der gegebenen $y_r = f(x_r)$ mit diesen charakteristischen Zahlen $\pm 1{,}000$; $\pm 0{,}966$; $\pm 0{,}866$; $\pm 0{,}707$; $\pm 0{,}500$; $\pm 0{,}259$ werden in eine »Grundtafel« eingetragen. Diese Grundtafel liegt vor, auf Pauspapier gedruckt, in der obersten Horizontalreihe die 12 charakteristischen Zahlen, in der Vertikalreihe links die Zahlen 1 . . . 24 führend, und besitzt den Vorteil, daß diejenigen ihrer Felder, die den Formeln (2) entsprechend mit 0 zu versehen wären, von Anfang an schwarz gefärbt, Eintragungen nicht zulassen. Da weiter jedem einzelnen Koeffizienten a_n', b_n' ganz bestimmte von Null verschiedene Produkte $y_r \cdot \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} \frac{n\pi}{m} \cdot r$ entsprechen, ist für jeden Koeffizienten mit Ausnahme von a_0 und a_m — vergl. Fußnote oben — eine Kartontafel beigegeben, auf der die diesem Koeffizienten entsprechenden Felder »leuchtend rot« ausgefüllt sind; schiebt man diese unter die Grundtafel, so hat man bloß die Summe A_n (resp. B_n) der Zahlen der Grundtafel, die auf rotem Grund erscheinen, zu bilden, um den entsprechenden Koeffizienten $a_n' = \frac{A_n}{12}$ resp. $b_n = \frac{B_n}{12}$ zu finden. (Das konstante Glied $\frac{1}{2}\,a_0'$ = Gesamtsumme der Ordinaten A_0 durch 24.)

Das von Springer verlegte, sehr sorgfältig ausgestattete Werkchen enthält außer den 22, den Koeffizienten $A_1 \ldots A_{11}$, $B_1 \ldots B_{11}$ entsprechenden, meist roten Kartontafeln, die ja für jede harmonische Analyse $(2m = 24)$ wieder verwendbar sind, zwanzig zum Verbrauch bestimmte Exemplare der Grundtafel, in die die jeweiligen Eintragungen für eine bestimmte Analyse zu machen sind. Eine Zahlentabelle ist beigegeben, die die Pro-

---

[1]) Vergl. diese Zeitschr., Bd. 1, S. 153 bis 156; ferner W. Lohmann, »Harmonische Analyse zum Selbstunterricht«, Fischers medizin. Buchhandlung, Berlin W.

[2]) Diese Formeln ergeben sich, wenn man nach dem die Punkte y_0, $y_1 \ldots y_{2m}$ $(y_0 = y_{2m})$ verbindenden trigonometrischen Polynom fragt. Von den Autoren werden sie oft so aufgefaßt, als werde in der Integralformel $a_\nu = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} \nu x\,dx$ der Integrant durch eine $2m$-stufige Treppenkurve mit den Ordinaten $y_0 \ldots y_{2m}$ ersetzt. Der Wert des Koeffizienten a_m ergibt sich allerdings bei dieser Auffassung verschieden von dem in (2) gegebenen Wert, nämlich doppelt so groß. — Bei Zipperer werden überhaupt nur die 22 ersten Koeffizienten bei $2m = 24$ bestimmt.

dukte der fünf charakteristischen Zahlen mit den Zahlen 1 . . . 200 liefert, ergänzt durch Differenzentabellen. Zwei in der Wechselstromtechnik häufigen Spezialfällen ist bei Anordnung der Tafeln noch besonders Rechnung getragen:

a) Die Funktionswerte, die den Abstand einer halben Periode voneinander haben, sind entgegengesetzt gleich, dann ist $a_n = b_n = 0$ für gerades n; $\begin{matrix} a_n \\ b_n \end{matrix} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x) \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} n\,x\,dx$ für ungerades n.

b) Die Kurve ist zentrisch symmetrisch zum Ursprung; dann ist $a_n = b_n = 0$ für gerades n; $a_n = 0$, $b_n = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} f(x) \sin n\,x\,dx$ für ungerades n. Es findet sich an der Spitze jeder Koeffiziententafel ein Hinweis auf diese Sonderfälle, z. B. auf der Tafel für a_3 neben $a' = \frac{A_3}{12}$ (allgemeiner Fall) auch der Vermerk $\bar{a}_3' = \frac{A_3}{6}$ (Spezezialfall a), $\bar{\bar{a}}_3' = 0$ (Spezialfall b).

Mechanische Lösung von Differentialgleichungen. M. Knorr beschreibt in »Elektrische Kraftbetriebe und Bahnen«, Bd. 19, 1921, S. 273/275 und S. 285/288 einen wegen seiner speziellen Verwendbarkeit zur Integration der Differentialgleichung der Zugbewegung: $m\frac{d^2 s}{dt^2} = F_1\left(\frac{ds}{dt}\right) + F_2(s)$ [m = Zugmasse, $F_1\left(\frac{ds}{dt}\right)$ = von der Geschwindigkeit $\left(\frac{ds}{dt}\right)$ abhängige Zugkraft, $-F_2(s)$ = Streckenwiderstand)] Fahrdiagraphen genannten Integraphen. Mit diesem läßt sich die allgemeine Differentialgleichung 2ter Ordnung

$$m\frac{d^2 s}{dt^2} + F_1\left(\frac{ds}{dt}\right) + F_2(s) + F_3(t) = 0 \quad (1)$$

mechanisch integrieren. Wir wollen an Hand der einfachsten in (1) enthaltenen Aufgabe

$$m\frac{dv}{dt} = F_1(v) \ldots\ldots\ldots (1')$$

die Wirkungsweise kurz erläutern. »$F_1(v)$ sei als Diagramm gegeben, gesucht die v/t-Linie (Abb. 2). Die Trommel 1 (T_1) ist mit ihrer Welle 1 durch einen Mitnehmer so gekoppelt, daß sie sich zwangläufig mit ihrer Welle dreht, jedoch entlang ihrer Welle frei verschiebbar bleibt. Die auf ihrer Welle 3 festgekeilte Trommel 3 (T_3) dient als Diagrammtrommel. Die Wellen 1 und 3 werden durch die Welle 4 von Hand oder mechanisch angetrieben. E_1 ist eine wagerechte zum Auflegen von Diagrammen bestimmte Ebene, die lediglich die axialen Verschiebungen der (T_1) mitmacht und sie mittels des Schreibstiftes Sch_1 auf die (T_3) überträgt. Wird die Reibrolle R_1 unter dem Anstellwinkel α an die (T_1) angepreßt und

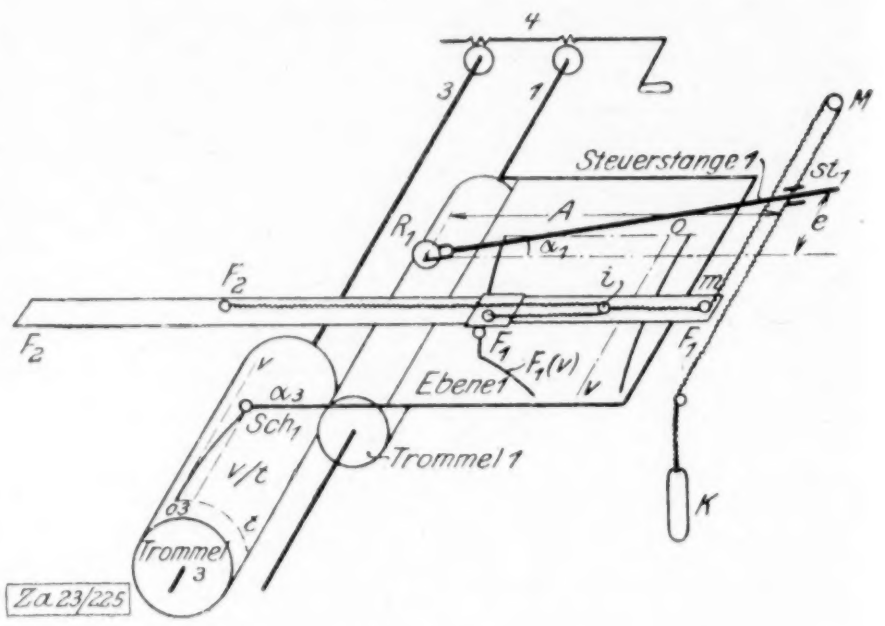


Abb. 2

Welle 4 angetrieben, so beschreibt bei fehlerfreiem Gang jeder Punkt des zylindrischen Umfanges der (T_1) eine Schraubenlinie, aber mit dem Steigungswinkel α_3, wobei entsprechend der Gesamtübersetzung gilt: $\operatorname{tg}\alpha_3 = \cos n\,t \cdot \operatorname{tg}\alpha_1$; jede Aenderung von α_1 ändert die Steigung Man hat daher die Vorrichtung treffend als »Schraube mit veränderlicher Steigung« bezeichnet. Auf die E_1 wird die gegebene $F_1(v)$ aufgelegt. Ueber diesem Diagramm und entlang der Laufbahn $f_1 f_2$ wird der Fahrschieber F_1 von Hand so geführt, daß er ständig auf die $F_1(v)$ zeigt. Mittels einer Seilschlinge $F_1 - i - F_2$, die bei F_2 festliegt, der losen Rolle i des Seiles $i - m - n - St_1$ und der Steuerstange 1 wird die Steuerrolle R_1 gesteuert.

In der Nullage des Gerätes stehen F_1 auf 0_1, Sch_1 auf 0_3 und Steuerstange 1 so, daß $\alpha_1 = 0$ ist. Das Gerät wird nun über die Welle 4 angetrieben. Führt man den Schieber F_1 wie besprochen, so ist die Strecke e und damit $\operatorname{tg}\alpha_1$ und damit $\operatorname{tg}\alpha_3$ ständig proportional $F_1(v)$. Das ist aber die Bedingung, die nach (1') auch für $\frac{dv}{dt}$ gestellt wird. Die von Sch_1 auf T_3 aufgezeichnete Linie ist daher in einem bestimmten Maßstabe die gesuchte v/t-Linie. Der Maßstab hängt ab von der Strecke A_1, die beliebig eingestellt werden kann.«

Wie die meisten Integraphen gestattet auch der Fahrdiagraph die »Umzeichnung« von Beziehungen, d. h. z. B. aus der v/t- und der s/t-Linie die v/s-Linie zu ermitteln. — Die Abmessungen sind so getroffen, daß die nutzbare Diagrammhöhe 220 mm beträgt. — Durch sinngemäße Hinzufügung und Schaltung einer entsprechenden Anzahl ($n-2$) von »Schrauben mit veränderlicher Steigung« könnten ähnlich auch Differentialgleichungen $n$ter Ordnung des Typus (1) gelöst werden. »Die konstruktive Durchbildung entsprechender Geräte würde keine besondern Schwierigkeiten bieten. Wichtig ist, daß auch hier wieder jede der »Schrauben mit veränderlicher Steigung« für sich auf fehlerfreies Arbeiten eingeregelt und damit ein hoher Grad von Genauigkeit für das Gerät als Ganzes erzielt werden kann.«

Der Integrant. Einen einfachen und anspruchslosen Apparat, ein »Zeichengerät«, das die Integration von $y' = f(x)$, also die Integration im engern Sinne gestattet, beschreibt W. Blochmann in Nr. 31/32 der »Präzision«. 1922, S. 408 bis 412. Das Gerät ist eine Art Stellwinkel mit den beiden Schenkeln U und V (vergl. Abb. 3). Die aus Hartmessingblech her-

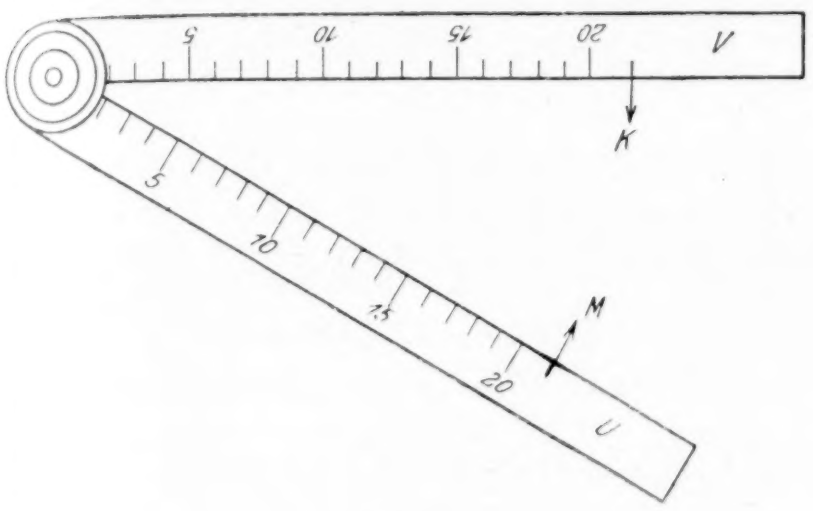


Abb. 3

gestellten Schenkel sind durch einen genieteten Drahtzapfen fest miteinander verbunden; eine mit eingenietete federnde Scheibe preßt den oberen Schenkel auf den unteren, so daß beide Schenkel sich nach Einstellung eines beliebigen Winkels in ihrer Lage zueinander nicht mehr verändern. Beide Schenkel tragen eingeätzte Teilungen, die ihren Nullpunkt im Drehpunkt haben. — Die Funktion des Gerätes ahmt das einfachste Verfahren zeichnerischer Quadratur

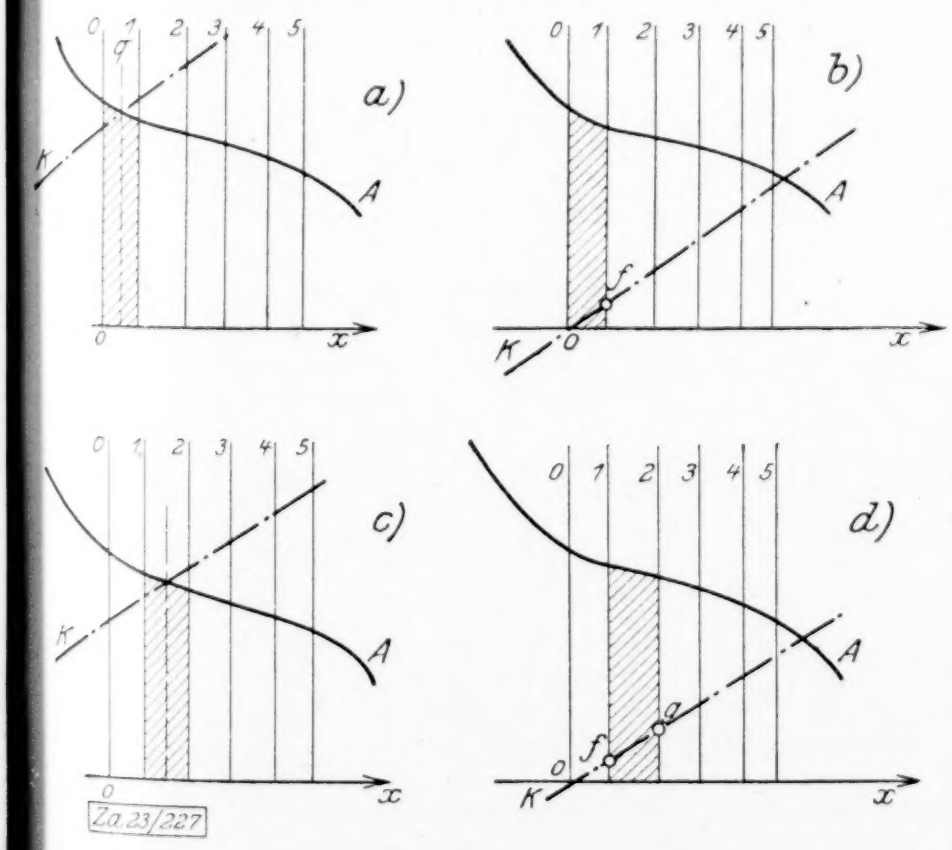


Abb. 4

nach. Um zur Kurve A (vergl. Abb. 4a) die Integralkurve zu zeichnen, zieht man beliebig viele Ordinaten von beliebigem Abstande || zur y-Achse, legt den Integranten so auf die Zeichnung, daß die innere Kante M des Schenkels U auf der x-Achse liegt, während die untere Kante gleichzeitig gegen die Reißschiene gehalten wird und ein bestimmter Teilungsstrich — z. B. 10 — durch die Mitte des ersten schraffierten Feldes geht; dann dreht man den Schenkel V so weit, bis seine Kante K durch den Schnittpunkt der Kurve A und der (gedachten oder gezeichneten) Mittellinie q des schraffierten Streifens führt, verschiebt sodann den Integranten der Reißschiene entlang, so daß die obere Kante des Schenkels V durch 0 führt (vergl. Abb. 4b) und markiert den Punkt f. Mit dem nächsten Streifen verfährt man ebenso: Man stellt Kante M auf die x-Achse, Teilstrich 10 auf die Mitte des zweiten Streifens ein, dreht Schenkel V, bis Kante K durch den Schnittpunkt $(A\,q)$ geht (vergl. Abb. 4c), verschiebt ||, bis die obere Kante (des Schenkels) durch den vorher ermittelten Punkt f geht (vergl. Abb. 4d) und markiert Punkt g. So markiert man auf jeder Senkrechten einen Punkt, ihre Verbindung liefert die Integralkurve A_1. — Abb. 5 zeigt die einfache Be-

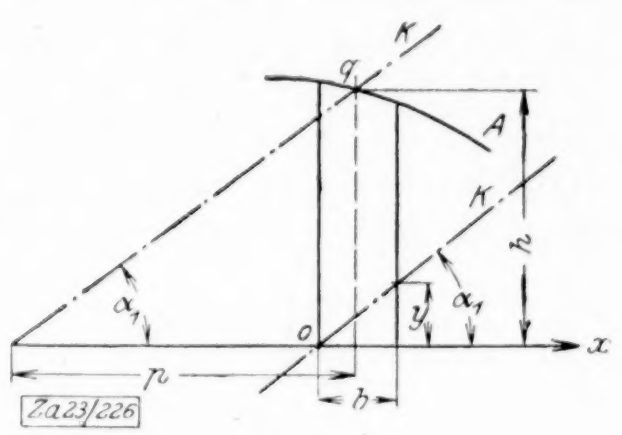


Abb. 5

gründung der geschilderten Konstruktion: p bezeichnet den gewählten Polabstand — bei uns 10 cm —, α den Winkel der Schenkelkante K mit der Basis, b die Breite, h die Höhe eines der benutzten Flächenstreifen, dann folgt aus $\frac{y}{h} = \frac{b}{p}$, $y = \frac{b\,h}{p}$, d. h. proportional dem Flächeninhalt des betrachteten Streifens.

Elementargeometrische Konstruktionen zur astigmatischen Brechung. In einer ziemlich weitläufigen Abhandlung entwickelt H. Cranz in der »Zeitschrift für Instrumentenkunde«, Februar 1922, Bd. 42, S. 33—46 einige Verfahren »zur bequemen graphischen und rechnerischen Ermittlung« gewisser in dem betrachteten Gebiet der geometrischen Optik auftretender Größen. Die dabei benutzten elementargeometrisch-konstruktiven, durch einfache trigonometrische Ueberlegungen ergänzten Gedankengänge bieten mathematisch nichts Neues. Betrachtet werden: »Berechnung und Konstruktion der astigmatischen Bildpunkte und Bildstrecken bei ebenen Flächen.« — »Durchgang eines zentrischen Strahlenbüschels durch den Hauptschnitt eines Prismas.« »Astigmatisierung eines engen zentrischen Strahlenbündels durch Brechung an einer Kugelfläche.« »Durchgang des Lichtes durch zwei brechende Kugelflächen.«

Hilda Pollaczek-Geiringer. 289

KLEINE MITTEILUNGEN

Ueber den Maxwellschen Satz der technischen Elastizitätstheorie. Im Folgenden soll der eindimensionale Maxwellsche Satz, im Rahmen der Biegungstheorie für Balken mit konstantem Querschnitt möglichst natürlich hergeleitet werden, als der Satz über die Symmetrie der Greenschen Funktion einer Differentialgleichung 4. Ordnung, die mit der Gleichung der elastischen Linie des Balkens in Zusammenhang steht. Als Einführung dazu sei es gestattet, eine Ableitung dieser Differentialgleichung zu skizzieren, die im Gegensatz zu dem Ueblichen nirgends vom Umstande Gebrauch macht, daß die Deformationen unendlich klein sind, was durch eine strenge Fassung eines Teiles der Navierschen Hypothese erreicht wird. Der nachfolgende Beweis des Maxwellschen Satzes ist völlig elementar.

§ 1.

I. Geometrische Hypothese. Die Fasern des Balkens gehen nach der Deformation in ein System paralleler Kurven (gemeinsame Normalenschar!) über (Abb. 1). Ueber das Verhältnis der Krümmungsradien zweier Kurven eines solchen Systems, die dann bekanntlich auch äquidistant sind, gilt ohne weiteres streng der Satz

$$\frac{\varrho_2}{\varrho_1} = \frac{\dfrac{d s_2}{d \varphi}}{\dfrac{d s_1}{d \varphi}} = \frac{d s_2}{d s_1},$$

oder wenn man von einer Mittelfaser aus rechnet, also $\rho_2 = \rho + y$, $\rho_1 = \rho$ und außerdem $s_2 = x + \xi$, $s_1 = x$ setzt:

$$\frac{y}{\varrho} = \frac{d \xi}{d x} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1).$$

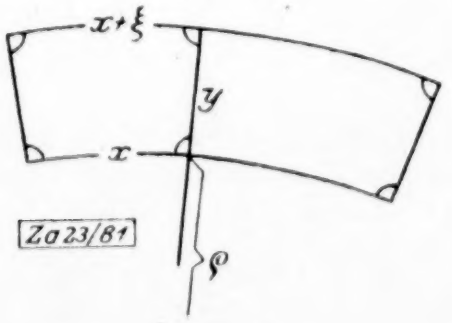


Abb. 1

II. Das Hookesche Gesetz, das bei homogenen Verhältnissen

$$\frac{\xi}{x} = \frac{\sigma_y}{E}$$

lautet, muß im Sinne der Nahewirkungsphysik zu

$$\frac{d \xi}{d x} = \frac{\sigma_y}{E} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

verallgemeinert werden.

III. Der Momentensatz liefert:

$$\int \sigma_y y \, d F = M_x \ldots\ldots\ldots (3).$$

Die Zusammenfassung von (1) (2) (3) liefert einerseits die strenge Gleichung der elastischen Linie

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{M_x}{J E},$$

andererseits die Grundformel der Biegungslehre

$$\sigma_y = \frac{M_x y}{J},$$

die auf diese Weise, streng genommen, nur in einem einzigen Akt hergeleitet werden können. — Erst jetzt wird die Hypothese über die Kleinheit der Deformationen in der Approximation $\frac{1}{\varrho} \sim y''$ herbeigezogen.

§ 2.

Der Maxwellsche Satz bezieht sich auf die Gleichung

$$y'' = \frac{M_x}{J E},$$

wo M_x eine Polygonalfunktion ist ($M''_x = 0$), deren Ableitung $\frac{d M_x}{d x} = Q$ einen einzigen, durch die Kraft allein bedingten Sprung besitzt, den man $= 1$ setzen kann. Es handelt sich also um die Greensche Funktion der gewöhnlichen Differentialgleichung

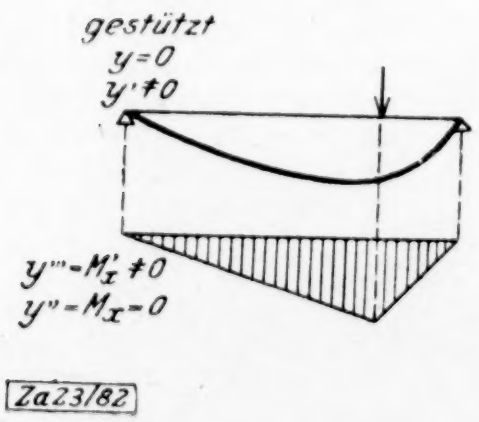
$$y^{IV} = 0$$

für das Intervall (o, l) mit folgenden Eigenschaften:

$$y, y', y'' \text{ stetig}; \quad y''' \Big|_{a-o}^{a+o} = 1$$

Randbedingungen: $y\,y''' = 0$, $y'\,y'' = 0$.

Daß die letzten immer erfüllt sind, wird durch Abb. 2 belegt.



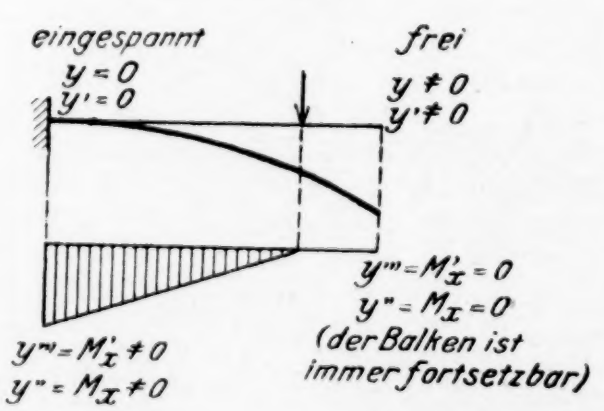


Abb. 2

Die diesen Bedingungen genügende Funktion werde mit $y(x, a)$ bezeichnet. Man betrachte jetzt $y_1(x) = y(x, x_1)$, $y_2(x) = y(x, x_2)$ und bilde:

$$\frac{d}{dx}(y_1 y_2''' - y_2 y_1''') = (y_1 y_2^{IV} - y_2 y_1^{IV})$$

$$+ (y_1' y_2''' - y_2' y_1''') = \frac{d}{dx}(y_1' y_2'' - y_2' y_1'')$$

(denn das erste Glied ist zufolge der Differentialgleichung null). Integriert man jetzt über das Intervall und beachtet, daß nur y''' unstetig ist, so kommt:

$$y_2(x_1) - y_1(x_2) + (y_1 y_2''' - y_2 y_1''')_0^l = (y_1' y_2'' - y_2' y_1'')_0^l$$

Nun sind zufolge der Randbedingungen die Klammerausdrücke $= 0$ und es bleibt:

$$y(x_1, x_2) = y(x_2, x_1),$$

womit der Maxwellsche Satz erwiesen ist.

§ 3.

Ganz ähnlich läßt sich auch die Torsionstheorie zusammenfassen. Auch hier drei Tatsachen: I. Geometrische Annahme über die Faserform — das Verbleiben der Faser auf einem Zylinder — also $\operatorname{tg}\gamma = r\frac{d\varphi}{dx}$; II. Schubdeformationsformel $\operatorname{tg}\gamma = \frac{\tau_r}{G}$; III. die Momentengleichung $\int \tau_r r\, dF = M_\tau$. Das führt wieder in einem Zug: einerseits auf die Faserngleichung $\frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_\tau}{J_p G}$ (gewöhnlich als die Formel für den Verdrehungswinkel bezeichnet); andererseits auf die Grundformel der Torsionstheorie $\tau_r = \frac{M_\tau r}{J_p}$. Es läßt sich auch hier ohne weiteres der Maxwellsche Satz formulieren, der aber eine Differentialgleichung 2. Ordnung $\varphi'' = 0$ betrifft [1]). — Daß der hier dargestellte einfache Zusammenhang sonst nicht mit aller Schärfe herauspräpariert wird, mag diese kleine Mitteilung rechtfertigen.

W. Alexandrow. 238

Ueber die Interpolation von Kurvenscharen. Bei der graphischen Darstellung einer Funktion $z = f(x\,y)$ mittels Kurvenscharen gehören zu jedem Punkte der Darstellungsfläche zwei Ordinaten des Netzes $x\,y$ und eine Kurve mit der Bezifferung z. Das Ordinatennetz beteht meist aus geraden Linien, und seine Teilung ist entweder regulär oder funktionell; jedenfalls aber so, daß man die Zwischenwerte, welche der Genauigkeit der Rechnung oder Beobachtung entsprechen, einfach optisch interpolieren kann. Schwieriger ist die Interpolation der Größe z, da man in den wenigsten Fällen soviel Kurven gezeichnet hat, daß eine der sonstigen Genauigkeit der Darstellung entsprechende Interpolation zwischen den Kurven möglich wird. Als Grund kommt hierfür einerseits in Betracht, daß die Berechnungs- oder Beobachtungsresultate gewöhnlich nicht immer in genügend großer Zahl vorliegen, und andererseits, daß die Uebersichtlichkeit der Zeichnung leiden würde, wenn zuviel Kurven eingetragen werden.

Abb. 1 gibt ein Beispiel dieser Art. Es werden die spezifischen Wärmen des Wasserdampfes in Abhängigkeit von der Temperatur dargestellt (Auerbach, »Graphische Physik«, S. 128). Wollen wir z. B. aus Abb. 1 die spezifische Wärme des Wasserdampfes bei 2,5 at und 150° ablesen, so würde es schon einige Schwierigkeiten machen, sie mit der gleichen Genauigkeit anzugeben wie die auf den Kurven ablesbaren Werte.

Mittels einer kleinen Hilfskonstruktion, die allgemein da verwendbar ist, wo es sich um die Interpolation von Kurvenscharen handelt, kann man alle Zwischenwerte mit der gleichen Genauigkeit ablesbar machen wie die auf den Kurven enthaltenen. Man legt nämlich über die Abbildung ein im allgemeinen willkürliches, aber aus Zweckmäßigkeitsgründen so gerichtetes Hilfskurvennetz (im folgenden »Kreuzkurven« genannt), daß die Kurven dieses Netzes die Kurven, die interpoliert werden sollen (im Folgenden »Urkurven« genannt), überall möglichst nahezu senkrecht schneiden. In der Abbildung sind mittels eines geeigneten

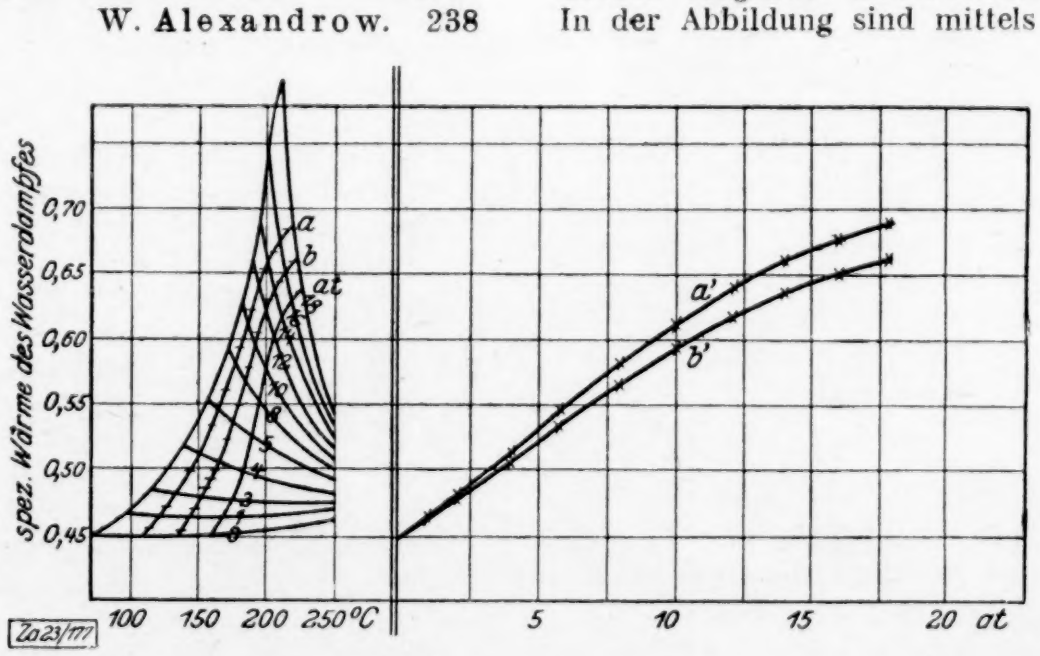


Abb. 1

[1]) Uebrigens läßt sich die Torsionstheorie so formulieren, daß in ihr ebenso der mathematische Torsionsbegriff auftritt, wie der Krümmungsbegriff in der Biegungslehre.

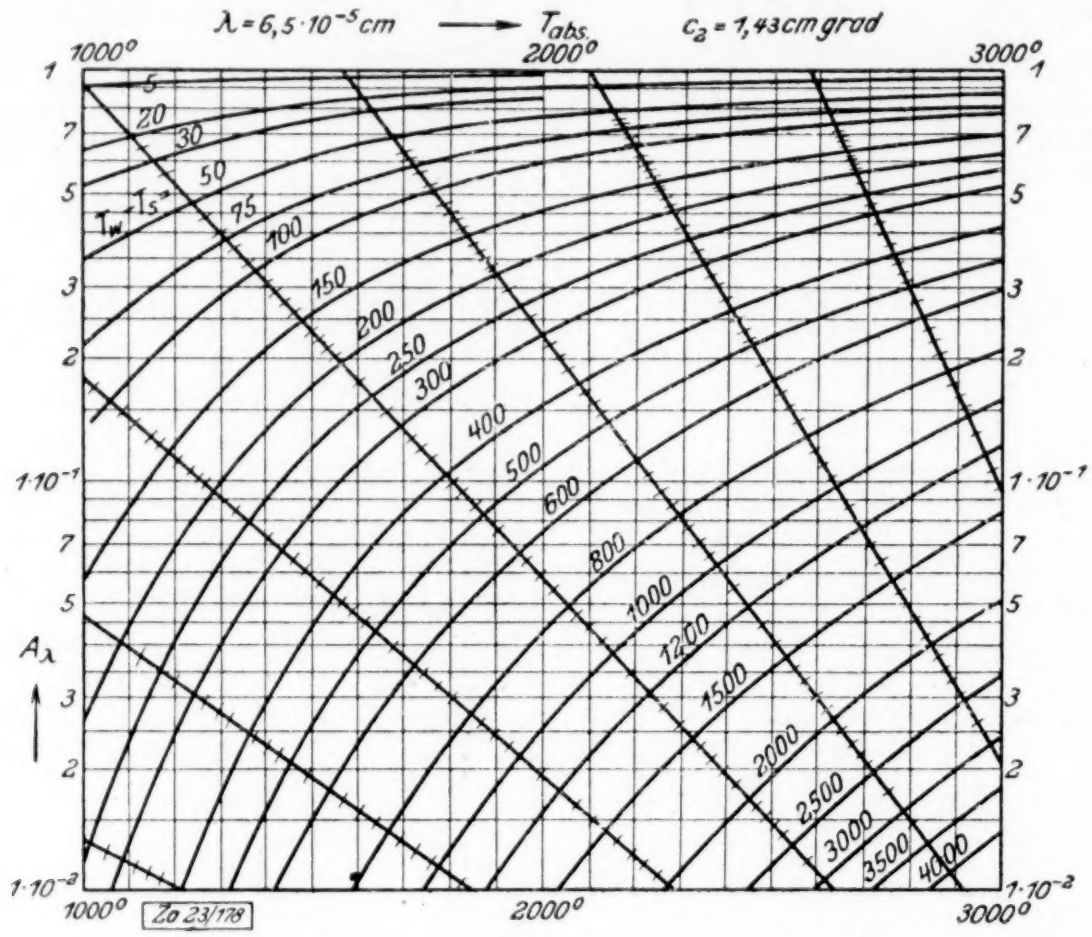


Abb. 2

Kurvenlineals eine Anzahl Kreuzkurven eingezeichnet. Zwei derselben sind mit a und b benannt. Ihre Schnittpunkte mit den Urkurven sind durch Kreuze angemerkt. In Abb. 1a sind die Ordinatenwerte der Kreuzkurven a und b als Funktionen ihrer Bezifferung $z = 0$ bis 16, als »Hilfskurven« $(y = \varphi(z))$ a' und b' eingezeichnet, wobei der Anschaulichkeit halber der gleiche Ordinatenmaßstab genommen wird wie bei der Urkurve. Durch Ablesung auf diesen Hilfskurven gewinnt man beliebig viele auf den Kreuzkurven liegende zusammengehörige Zwischenwerte von y und z, die man als Punkte in die Kreuzkurven eintragen kann, wodurch diese den Charakter von Skalen erhalten.

Die weitere Interpolation beim Ablesen erfolgt um so leichter, je genauer die Kreuzkurven senkrecht zu den Urkurven verlaufen, da dann die Zeichnung mit annähernd quadratischen Punktanordnungen bedeckt wird, zwischen denen es leicht ist, mit freiem Auge zu interpolieren.

Abb. 2 gibt einen Fall, bei dem als Kreuzkurvenschar ein Geradenbüschel genommen wird, welches von einem außerhalb der Abbildung liegenden Pol ausgeht. Es handelt sich um die aus dem Wien-Planckschen Strahlungsgesetz folgende Beziehung

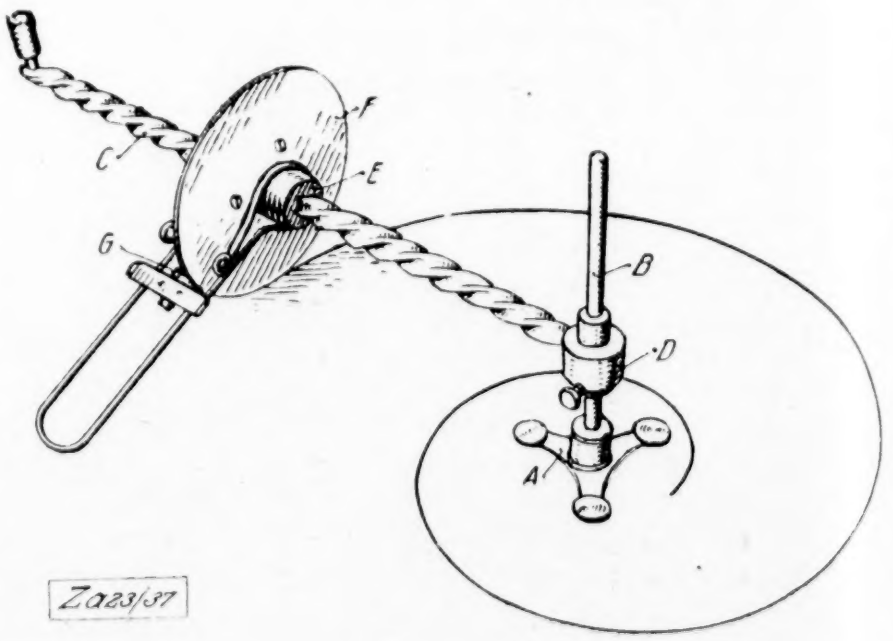
$$\ln A_\lambda = \ln [e^{c/\lambda T_w} - 1] - \ln [e^{c/\lambda T_s} - 1],$$

wobei A_λ in logarithmischem Maß in Abhängigkeit von der Beobachtungsgröße $T_w - T_s$ dargestellt ist. (A_λ = Absorptionsvermögen bezw. Durchlässigkeit; T_s = schwarze Temperatur; T_w = wahre Temperatur; λ = Wellenlänge, in der Figur konstant 0,59 μ).

Berlin, Dezember 1922. M. Pirani. 249

Einfacher logarithmischer Spiralenzeichner. Instrumente, mit denen die logarithmische Spirale sich mechanisch herstellen läßt, sind schon von Abdank-Abakanovicz (Integraphen, deutsch von E. Bitterli), Schimmak (Katenograph. Zeitschrift für Mathematik und Physik, 1905, Bd. 52) und Ch. H. Logue (Mechanical Engineering, Nov. 1922, S. 173) konstruiert worden. Das einfachste Instrument diese Kurve zu zeichnen, scheint aber das in der Abbildung dargestellte zu sein.

Dieses Instrument besteht aus einem Ständer A, der einen vertikalen Schaft B trägt; einer Schraube C, mittels des Lagers D an dem Schaft angebracht; einer Mutter E und daran einer scharfkantigen Scheibe F. Ein Farbenpolster G kann in der angedeuteten Weise angebracht werden. Wenn die Schraube um die feste Achse gedreht wird, beschreibt die



Scheibe auf dem Papier eine logarithmische Spirale.

Dreht sich nämlich die Spindel um einen Winkel $d\varphi$ um die Achse, so ist die Abwicklung der Scheibe

$$dA = R\,d\varepsilon = r\,d\varphi \quad \ldots\ldots \quad (1),$$

wo $2R$ den Scheibendurchmesser, ε den Drehungswinkel der Scheibe um die Spindel, r den Leitstrahl, d. h. die Entfernung der Scheibe von der Achse, bedeutet. Andererseits ist der Vorschub der Schraube

$$dr = \varrho\,d\varepsilon\,\mathrm{tg}\,\beta \quad \ldots\ldots \quad (2),$$

wo 2ρ den Spindeldurchmesser, β den Steigungswinkel bedeutet. Aus (1) und (2) folgt durch Division:

$$\frac{dr}{r} = \frac{\varrho}{R}\mathrm{tg}\,\beta\,d\varphi, \quad r = ae^{\frac{\varrho}{R}\mathrm{tg}\,\beta\,\varphi} = ae^{m\varphi}.$$

Das ist die Gleichung der logarithmischen Spirale. $m = \mathrm{tg}\,\alpha$ und α bestimmen bekanntlich den konstanten Winkel, den die Normale mit den Leitstrahlen bildet.

Aus der Beziehung

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\varrho}{R}\,\mathrm{tg}\,\beta$$

ist ersichtlich, daß man logarithmische Spiralen von verschiedener Steigung herstellen kann, indem man entweder die Steigung der Schraube oder den Durchmesser der Scheibe ändert. Es empfiehlt sich als zweckmäßig, die Mutter der Schraube so zu gestalten, daß man Scheiben von verschiedenem Durchmesser anbringen kann, wie bei der in der Abbildung angedeuteten Ausführung.

Pontiac, Mich., 15. November 1922.

Paul Schweitzer. 239

BUCHBESPRECHUNGEN

Dr.-Ing. L. **ZIPPERER,** Tafeln zur harmonischen Analyse periodischer Kurven. Mit 6 Zahlentafeln, 9 Abbildungen und 23 graphischen Berechnungstafeln. Verlag von Julius Springer, Berlin 1922. 12 S.

Ueber diesen für praktische Rechnungen nützlichen Behelf wird in dem vorliegendem Heft S. 231 berichtet. Mises.

HEINZ **EGERER,** Dr.-Ing., Dr. phil., Dipl.-Ing. Ingenieur-Mathematik. Lehrbuch der höheren Mathematik für die technischen Berufe. Zweiter Band. Mit 477 Textabbildungen und über 1000 vollständig gelösten Beispielen und Aufgaben. Berlin 1922, Julius Springer. X + 713 S.

Es handelt sich hier um den zweiten Band eines groß angelegten, auf drei Bände berechneten, umfangreichen Werkes, dessen erster Band kurz vor dem Kriege erschienen war. Es ist sowohl für den in der Ausbildung begriffenen, wie auch als Handbuch für den in der Praxis arbeitenden Bau-, Maschinen- und Elektroingenieur bestimmt. Der erste Band betraf die niedere Analysis und die Elemente der analytischen Geometrie nebst verwandten Gebieten. Der jetzt vorliegende zweite Band enthält die Infinitesimalrechnung und die üblichen Anwendungen auf die Geometrie der Kurven und Flächen, auf die Reihentheorie, Teile der Mechanik u. dgl. Der Inhalt des Buches ist außerordentlich reichhaltig, besonders hinsichtlich der zahlreichen Anwendungen auf technische Fragen; eine große Zahl von Aufgaben ist mit pädagogischem Geschick und kundigem Blick für die Bedürfnisse des Ingenieurs ausgewählt worden. Es muß anerkannt werden, daß der Verfasser achtungswerte Arbeit und vielen Fleiß in sein Werk gesteckt hat; auch mit der Anlage des Ganzen und der Einstellung auf den Gedankenkreis des Ingenieurs kann man sich durchaus einverstanden erklären.

Leider enthält das Buch eine nicht geringe Anzahl gedanklicher und anderer Fehler, die zu dem Eindrucke führen, daß der Verfasser in mathematischer Hinsicht der Aufgabe, ein solches Werk zu schreiben, doch nicht gewachsen sei, keinesfalls über dem Gegenstande stehe; — dieses sei, bei aller Anerkennung der oben erwähnten Vorzüge des Werkes, gleich ganz offen herausgesagt. Hierfür lassen sich zahlreiche Belege anführen, die teils in offenbaren Fehlern der geläufigen Definitionen, der Beweisführung, sogar des Rechnens, teils in unklaren und irreführenden Ausdrucksweisen bestehen. Es seien daraus in zwangloser Reihenfolge einige herausgegriffen.

Auf S. 254 kann man gesperrt gedruckt folgenden Satz lesen: »Eine Funktion von x kann immer in eine Potenzreihe von der Form $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots$ verwandelt werden, aber nur in eine einzige.« Daß das nicht zutrifft, sollte jeder Student schon in der Vorprüfung wissen, und er soll einige Gegenbeispiele an der Hand haben, etwa $1/x$, $\log x$, $\sqrt{x}$, $\mathrm{ctg}\,x$ usw. Aber auch der a. a. O. geführte Beweis für die Eindeutigkeit der Darstellung, wenn sie zulässig ist, stimmt nicht, denn es wird dort $x = 0$ gesetzt und zwei Zeilen später durch x dividiert. Auf S. 49 sind bei der Berechnung des Grenzwertes für e zwei Grenzübergänge vertauscht, der Beweis ist also nicht stichhaltig. S. 36 u. f. ist die Stetigkeit falsch erklärt; danach soll $f(x)$ an der Stelle x stetig sein, wenn

$$\lim_{\Delta x \to 0} (f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)) = 0$$

ist. Beispiel des Gegenteils: $f(x) = 1/x^2$ an der Stelle $x = 0$. Dieser Fehler in der Definition der üblichen Stetigkeit rührt von Schlömilch (Algebraische Analysis, 1845) her, ist aber von ihm selbst schon 1849 bemerkt worden, er ist jedoch noch Jahre hindurch anzutreffen. Auch die in Schlömilchs Compendium der höheren Analysis

noch in der fünften Auflage (1881) zu findende Verallgemeinerung $f(x)$ sei bei x stetig, wenn $f(x+\delta)-f(x-\gamma)$ mit δ und γ zugleich nach Null konvergiert, trifft nur für hebbare Unstetigkeiten zu; Beispiel:

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{nx+a}{nx+1} \qquad (a\neq 1).$$

Auch diese falsche Definition hat sich fortgeerbt und findet sich z. B. noch 1910 in Kiepert-Stegemanns Differential- und Integralrechnung und hat infolge der starken Verbreitung dieses Buches von da aus leider weiter gewirkt. S. 252 findet sich ein fehlerhafter Beweis des Satzes über Reihen mit abwechselnden Vorzeichen der Glieder, Reihen, die bekanntlich schon dann konvergieren, wenn die Glieder nach Null abnehmen; bei dem angeblichen Beweise wird jedoch von diesem Umstande gar kein Gebrauch gemacht. S. 259 und 260 ist die Auslassung, die als Beweis des Mittelwertsatzes bezeichnet wird, kein Beweis, sondern eine geometrische Deutung des zu beweisenden Satzes. Die auf S. 455 gegebene Definition der Hüllkurve als geometrischer Ort der Schnittpunkte unendlich benachbarter Kurven des Systems ist nicht zweckmäßig, da sie z. B. nicht den Fall der Krümmungskreise umfaßt, die von der zugehörigen Kurve eingehüllt werden, und sich, wie etwa bei der Ellipse, überhaupt nicht zu schneiden brauchen. Auf S. 40 wird der Grenzwert von $(1-\cos x):x$ für $x\longrightarrow o$ vom Verfasser infolge eines gleich zu Beginn der Rechnung vorkommenden Rechenfehlers zu $1/\sqrt{2}$ bestimmt, während doch die Unmöglichkeit dieses Ergebnisses aus der Reihenentwicklung für $\cos x$ sofort in die Augen springt. S. 49 steht $e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\lim R$ unverständlich und für den Anfänger irreführend. S. 127 findet man:

$$\int\frac{dx}{x}=\frac{x^0}{0}+C=\infty+C$$

mit der Bemerkung: »Diese Lösung wäre zwar nicht unrichtig, aber für die weitere Rechnung wertlos«; nein, sie ist überhaupt sinnlos wie 15 Kilowatt minus 6° Celsius. Der Verfasser unterscheidet auf S. 628 sorgfältig zwischen einem elliptischen, einem hyperbolischen und einem parabolischen Kegel, während in allen drei Fällen derselbe Kegel zweiten Grades vorliegt. Ich weiß nicht, was es bedeuten soll, wenn auf S. 349 von einem »geradlinigen« Flächenelement die Rede ist, auf S. 383 eine Kurvengleichung als analytischer Ausdruck für die »Eigenschaften des erzeugenden Punktes« bezeichnet wird, wenn S. 258 geschlossen wird, daß alle Gesetze, welche für ganze rationale Funktionen gelten, auch für alle Funktionen überhaupt gelten, solange sie endlich und stetig bleiben.

Diese doch schon nicht unbeträchtliche Auslese von Unzulänglichkeiten ließe sich noch vermehren.

Die Ausstattung des Buches ist sehr gut, die Abbildungen sind vorzüglich und klar gezeichnet (nur Abb. 276 ist für $y=x\sin x$ nicht charakteristisch). Bei der Abfassung des dritten Bandes wird der Verfasser sich sachverständigem mathematischen Rat nicht verschließen dürfen; dann nämlich, aber auch nur dann, kann etwas sehr brauchbares und empfehlenswertes herauskommen. Was zu wünschen wäre. R. Rothe. 261

MARTIN **LINDOW,** Dr., Studienrat, Münster i. W. Differentialgleichungen unter Berücksichtigung der praktischen Anwendung in der Technik, mit zahlreichen Beispielen und Aufgaben versehen. Mit 38 Abbildungen im Text und 160 Aufgaben. Aus Natur und Geisteswelt. Sammlung wissenschaftlich-gemeinverständlicher Darstellungen. 589. Band. Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin 1921. 106 S.

In diesem Büchlein werden eine Anzahl elementarer Verfahren zur Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen erster und zweiter Ordnung an der Hand von bestimmten Beispielen auseinandergesetzt, die vielfach der Technik und Physik entnommen sind. Auch die zeichnerischen und rechnerischen Methoden werden in Kürze behandelt. Die Darstellung ist bei aller Gedrängtheit doch im allgemeinen verständlich. Die Beispiele sind mit Sorgfalt ausgewählt und auch hinsichtlich ihres technisch-physikalischen Teiles gut erläutert. Wer in die ersten Anfangsgründe der Lehre von den gewöhnlichen Differentialgleichungen eindringen will und dabei auf die technisch-naturwissenschaftlichen Anwendungen Gewicht legt, wird mancherlei Anregungen und nützliche Winke aus der kleinen Schrift ziehen können. Einige Ausstellungen könnten bei einer zweiten Auflage leicht berücksichtigt werden. Die auf S. 7 u. f. gegebene Erklärung der Hüllkurve als Ort der Schnittpunkte benachbarter Partikularlösungen einer Differentialgleichung ist nicht weit genug; diese brauchen sich gar nicht zu schneiden und können doch eine Hüllkurve besitzen. Auch kann es (entgegen der Behauptung auf S. 38) vorkommen, daß die singuläre Lösung nicht nur nicht Enveloppe, sondern sogar zugleich partikuläre Lösung ist. Der Sachverhalt ist in Wirklichkeit verwickelter, als er in einem solchen Büchlein auseinandergesetzt werden könnte. Der Beweis auf S. 31 und 32 für $\partial^2 z/\partial x\,\partial y=\partial^2 x/\partial y\,\partial x$ ist nicht stichhaltig, weil zwei Grenzübergänge vermengt werden, er gehört auch meines Erachtens überhaupt nicht in das Buch. Ob die ohne Beweis angeführte Benutzung der Simpsonschen Regel für die angenäherte Lösung von Differentialgleichungen wirklich verständlich genug dargestellt ist? Die auf S. 45 u. f. auseinandergesetzte zeichnerische Integration liefert das bestimmte Integral mit veränderlicher oberer Grenze. Ist diese konstant, so genügt (mit größerer Genauigkeit!) die Ausmessung des Inhalts der Treppenkurve, die als Ersatz der Kurve des Integranden gezeichnet werden muß. R. Rothe. 262

Dr. LUDWIG **BIEBERBACH,** o. ö. Professor der Mathematik an der Friedrich-Wilhelms-Universität Berlin. Differential- und Integralrechnung. Band I: Differentialrechnung. Zweite, vermehrte und verbesserte Auflage. Mit 34 Abbildungen im Text. Teubners Technische Leitfäden, Bd. 4. IV + 131 S. — Funktionentheorie. Mit 34 Abbildungen im Text. 118 S. Teubners technische Leitfäden, Band 14. Verlag von B. G. Teubner, Leipzig und Berlin 1922.

Mit Vergnügen habe ich die zweite Auflage der Differentialrechnung noch einmal durchgesehen, deren erste ich, wie auch die entsprechende Integralrechnung (Bd. 5 der technischen Leitfäden), stets in meinen Vorlesungen für mathematisch interessierte Hörer zu empfehlen pflege. Die Auswahl ist geschickt. Auf den 132 Seiten wird gerade das geboten, was zu einer ersten Einführung in die Differentialrechnung notwendig ist. Die Darstellung ist streng, doch niemals langweilig, vielmehr nach Möglichkeit auschaulich. Inhalt und Anordnung geht aus den folgenden 10 Kapitelüberschriften hervor: Funktionsbegriff, Zahlbegriff, Unendliche Reihen, Stetige Funktionen, Differentialrechnung, Geometrische Anwendungen, Taylorsche Formel, Unbestimmte Formen, Beispiel einer stetigen, nirgends differenzierbaren Funktion, Funktionen von zwei Variabeln. Im einzelnen verweise ich noch auf einen Paragraphen über Interpolation, der auf gut drei Seiten das Wichtigste bringt. Die eigentlichen Anwendungen fehlen. Die Bändchen verleugnen nirgends ihre Herkunft von Universitätsvorlesungen. Als technische Leitfäden bedürfen sie also noch irgendwie der Ergänzung.

Denselben Charakter besitzt das Bändchen über Funktionentheorie. Hier ist allerdings zum Schlusse das Ausflußproblem als Anwendung auf Hydromechanik ausgeführt. Im übrigen ist die Art und Anlage ähnlich dem hier (Bd. 2, Heft 2) schon angezeigten ersten Bande der größeren Funktionentheorie desselben Verfassers, weshalb wir uns jetzt wohl kürzer fassen können. Die Darstellung ist in diesem kleinen Bändchen infolge kluger Beschränkung des Stoffes weit elementarer und daher zu einer ersten Einführung sehr wohl geeignet. Auch der Praktiker, der das kleine Buch benutzt, braucht von abstrakten Dingen nicht mehr zu schlucken, als heute unbedingt nötig ist. Der frische Ton einer Vorlesung ist im allgemeinen glücklich festgehalten. Nur zum Schlusse, namentlich S. 96, ist die Darstellung wohl etwas knapp. Vielleicht darf ich auch einen störenden Druckfehler nennen: auf S. 105, Zeile 11 von oben fehlt zwischen »Die« und »können« der Buchstabe A. Die Stoffanordnung mag durch folgende Stichworte gekennzeichnet sein: Komplexe Zahlen (§ 1), Elementare Funktionen (§ 2 bis 7), Reihenlehre (§ 8), Integralrechnung (§ 9), Der Hauptsatz der Funktionentheorie (Cauchyscher Satz, § 10 bis 12), Doppelreihensätze von Weierstrass und Vitali (§§ 13 und 23), Singuläre Stellen (§ 17), Residuen (§ 18), Reihen- und Produktdarstellung periodischer Funktionen (§ 19), Fundamentalsatz der konformen Abbildung (§§ 24 und 25), Praxis der konformen Abbildung (§ 26), Abbildung eines Rechtecks auf einen Kreis (dabei Elemente der elliptischen Funktionen, § 27), Beziehungen zur Potentialtheorie (§ 28), Einiges aus der Hydrodynamik (§ 29).

Beide Bändchen können in erster Linie den Studenten, dann aber auch den Lesern dieser Zeitschrift warm empfohlen werden, wenn sie ihre Mathematik in angenehmer Weise auffrischen und ergänzen wollen.

Berlin, Dezember 1922. Hamel. 245

Dr. GEORG **SCHEFFERS,** o. Professor an der Technischen Hochschule Berlin; Lehrbuch der darstellenden Geometrie in zwei Bänden. Zweiter Band. Mit 396 Fig. im Text. Berlin 1920, Verlag von Julius Springer. VIII + 439 S.

Der zweite Band dieses Werkes, dessen erster in Bd. 2, 1922, S. 224 bis 225 besprochen wurde, zerfällt in zwei Teile; der erste, das 4. Kapitel, behandelt die Zentralprojektion oder Perspektive, der zweite, das 5. Kapitel des ganzen Buches, Anwendungen und Ergänzungen. Nach Erörterung des Begriffes der Zentralprojektion wird zunächst die gebundene oder unfreie Perspektive entwickelt, bei der der Gegenstand durch seine Risse gegeben ist und eine bestimmte Grundebene und ein Horizont eingeführt wird. Erwähnung verdienen die Betrachtungen über Vergrößerung des Bildes, Vergrößerung der Distanz und gleichzeitige Vergrößerung des Bildes und der Distanz. Dann folgen die Schattenkonstruktionen. Es wird von dem allgemeinen Falle ausgegangen, daß die Beleuchtung durch einen im Endlichen gelegenen, mathematischen Punkt erfolgt. Praktisch kommt das ja allerdings nur sehr selten vor und dann auch immer nur angenähert, aber in mathematischer Hinsicht gewinnt der Verfasser damit einen sehr guten Standpunkt und er weiß die zahlreichen Möglichkeiten sehr geschickt zu realisieren, z. B. (S. 68) durch eine Lichtquelle, die sich in einem Keller befindet und durch eine im Boden befindliche Treppentür den darüber befindlichen Raum beleuchtet.

Daran schließt sich naturgemäß die Behandlung der Perspektivität, d. h. perspektiver Ebenen, die entweder getrennt im Raume liegen oder in einer Ebene sich befinden, und sie erfolgt in sehr eingehender Weise. Beispielsweise werden die Winkel untersucht, die sich in wahrer Größe abbilden. Das perspektive Bild von Kreis und Kugel läßt die Kegelschnitte als perspektive Bilder des Kreises in die Erscheinung treten, die stereographische Projektion wird kurz berührt und die Sätze von Pascal und Brianchon schließen diese Betrachtungen ab. In gedrängter Kürze wird sodann die freie Perspektive behandelt, deren Abschluß das perspektive Bild eines Würfels bildet.

Unter den Anwendungen möchte der Berichterstatter die Betrachtung von Flach-Ornamenten hervorheben, d. h. von Verzierungen, Ranken usw., welche wenig erhaben auf einer Ebene sich befinden. Es bietet sich dabei Gelegenheit, auf fehlerhafte Konstruktionen beim Ornamentenzeichnen hinzuweisen. Die Geländeflächen (topographische Flächen) sind der Gegenstand der weiteren Untersuchungen. Auch auf Böschungsflächen und Böschungskörper wird eingegangen und z. B. die Anlage eines Weges besprochen, der von einer Regelfläche gebildet wird, deren Erzeugende horizontal verlaufen (S. 258). In der Peanoschen Fläche gibt der Verfasser ein schönes Beispiel, wie Fragen der Analysis, in diesem Falle der Variationsrechnung, geometrisch gedeutet werden können. Den Rotationsflächen und Rotationskörpern sind die weiteren Betrachtungen gewidmet. Die Hyperboloid-Räder und das dazu gehörige allgemeine Problem werden besprochen. Die Rotationsflächen mit übereinstimmenden ebenen Schnitten oder mit übereinstimmenden Umrissen liefern Sätze, die wenig bekannt sind. Die allgemeinen Flächen zweiter Ordnung ergeben sich aus den Rotationsflächen zweiter Ordnung durch eine affine, räumliche Beziehung. Schraubenlinien und Schraubenflächen, sowie die zyklischen Kurven, die geradlinigen Flächen und eine Reihe einzelner Flächen werden in geometrisch anschaulicher Weise erledigt. Die Darstellung wendet sich dann der Durchdringung von Kegeln und Zylindern zu und deren Anwendung in der Schattenkonstruktion und schließt mit einer kurzen Behandlung der Reliefperspektive. Das bei Besprechung des ersten Bandes dem Buche gespendete Lob kann auch hier uneingeschränkt wiederholt werden. Daß die Betrachtung im zweiten Band noch weiter in das rein-mathematische Gebiet übergeht, liegt in der Natur der Sache. Doch hätte vielleicht mehr Fühlung mit praktischen Fragen genommen werden können. Bei den Geländeflächen z. B. ist die Beziehung zur Kartographie kaum berührt. Die Ausdrücke Aequidistanz, Schichthöhe, kotierte Projektion, Cotes könnten als technisch häufig benutzte Begriffe irgendwo Erwähnung finden. Daß die Sonnenbeleuchtung nicht ohne weiteres mit der abstrakten Parallel-Beleuchtung der Technik identifiziert werden darf, wurde schon früher bemerkt. Einige Bemerkungen über die Natur der Schatten, die durch körperliche Lichtquellen erzeugt werden, wären angebracht. Eine Gerade hat (S. 35) zwei Teilungspunkte und sie wären in Verbindung zu bringen mit der Richtung, in der eine Strecke auf einer Geraden angetragen werden soll. Die Methoden für unzugängliche Fluchtpunkte — das Hauptproblem der praktischen Perspektive — sind etwas dürftig behandelt; die vom Verfasser auf S. 47 gegebene Lösung dürfte sich als zu umständlich in der Praxis nicht einbürgern. In der Einleitung wird erwähnt, daß Beleuchtungslehre und Photogrammetrie beiseite gelassen wurden. Die letztere Disziplin vermißt der Berichterstatter nur sehr ungern. Denn sie gewinnt gerade in der Gegenwart immer mehr Bedeutung für den Techniker.

München, 4. März 1923.

Karl Doehlemann. 272

NACHRICHTEN

Versammlung in Marburg September 1923. Der Ausschuß der Deutschen Mathematiker-Vereinigung hat beschlossen, in der Woche vom 16. bis 22. September die Jahresversammlung in Marburg abzuhalten. Es besteht Aussicht dafür, daß auch die beiden Physikalischen Gesellschaften sich diesem Beschuß anschließen werden. An die Mitglieder der Ingenieurwissenschaftlichen Vereinigung (Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik) werden besondere Einladungen zur konstituierenden Versammlung und wissenschaftlichen Tagung ergehen. Anmeldungen von Vorträgen an den Vorsitzenden, Prof. Prandtl, oder an den Geschäftsführer, Prof. v. Mises, sind schon jetzt erwünscht.

Ausschuß für graphisches Rechenverfahren. Am 12. Dezember 1922 hielt Herr Studienrat Schwerdt einen Vortrag über das Gleitkurvenprinzip, in dem er einige von ihm und Hrn. Pirani entworfene Leitertafeln erklärte. In der 7. Sitzung des Ausschusses am 27. Februar 1923 sprach Dr. v. Stritzl über einige neuere Arbeiten betreffend Flächennomographie. Am 9. Mai fand eine Besprechung statt, die der Einheitlichkeit in der Bezeichnung von Verfahren und Benennungen gewidmet war, und an der auf besondere Einladung des Ausschusses Hr. Lacmann aus Christiania teilnahm, mit Rücksicht auf das von ihm vorbereitete, im Verlag von Springer erscheinende Lehrbuch der Nomographie. Die 8. Sitzung des Ausschusses am 20. April beschäftigte sich mit dem Entwurf eines Merkblattes zur Herstellung von Rechentafeln und mit verschiedenen Einzelfragen. In der 9. Sitzung am 25. Mai fand ein Vortrag von Hrn. Ferner über Rechentafeln auf Logarithmenpapier und eine Aussprache über die Methoden in der Nomographie statt. Hr. Winkel berichtete über die Besprechung mit dem Deutschen Ausschuß für technisches Schulwesen hinsichtlich der Herausgabe von Merkblättern für graphische Rechenverfahren. 308

(Redaktionsschluß 30. Juni 1923.)

Verantwortlich: für die Schriftleitung Professor Dr. von Mises, Berlin W 30, Neue Winterfeldtstraße 43; für den Anzeigenteil Willy Kuhle, Berlin. — Verlag des Vereines deutscher Ingenieure, Berlin NW 7. Druck von A. W. Schade, Berlin N 39.